Differentialekvationer II

Räkneövning 2, höstterminen 2008

1. Funktionerna $x_1 \in C(\mathbf{R})$, $x_2 \in C(\mathbf{R})$ definieras på föjande sätt:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \cos t, \quad t \in \mathbf{R}, \\ x_2(t) &= \sin t, \quad t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

   Visa, att x_1 och x_2 är linjärt oberoende.

2. Funktionerna $x_1, x_2, x_3 \in C(\mathbf{R})$ definieras på följande sätt:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \cos 2t, \quad t \in \mathbf{R}, \\ x_2(t) &= \sin^2 t, \quad t \in \mathbf{R}, \\ x_3(t) &= 1, \quad t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

   Visa, att x_1, x_2 och x_3 är linjärt beroende.

3. Låt $A(t)$ vara en 2×2-matris. Är det möjligt att både $x_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix}$ och $x_2(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{4t} \end{pmatrix}$ tillfredsställer ekvationen $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$?

4. Visa, att $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ e^t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ är ett fundamentalsystem till ekvationen

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2e^{-t} \\ e^t & -1 \end{pmatrix} x(t).$$

5. Bestäm ett fundamentalsystem till ekvatinen

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} x(t).$$