

Differentiaaliyhtälöt II

2. harjoitus, syksy 2008

1. Määritellään funktiot $x_1 \in C(\mathbf{R})$, $x_2 \in C(\mathbf{R})$ seuraavasti:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \cos t, & t \in \mathbf{R}, \\x_2(t) &= \sin t, & t \in \mathbf{R}.\end{aligned}$$

Osoita, että x_1 ja x_2 ovat lineaarisesti riippumattomia.

2. Määritellään funktiot $x_1, x_2, x_3 \in C(\mathbf{R})$ seuraavasti:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \cos 2t, & t \in \mathbf{R}, \\x_2(t) &= \sin^2 t, & t \in \mathbf{R}, \\x_3(t) &= 1, & t \in \mathbf{R}.\end{aligned}$$

Osoita, että x_1, x_2 ja x_3 ovat lineaarisesti riippuvia.

3. Olkoon $A(t)$ 2×2 -matriisi. Onko mahdollista, että sekä $x_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix}$ että $x_2(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{4t} \end{pmatrix}$ toteuttavat yhtälön $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$?

4. Osoita, että $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ e^t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ on yhtälön

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2e^{-t} \\ e^t & -1 \end{pmatrix} x(t).$$

perusjärjestelmä.

5. Etsi yhtälön

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

jokin perusjärjestelmä.