

## Differentialekvationer II

Räkneövning 1, höstterminen 2008

1. Visa, att en kontraktion i ett metriskt rum är kontinuerlig.
2. Låt  $X = (0, 1)$  vara utrustad med metriken  $d(x, y) = |x - y|$ . Visa, att  $F(x) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{8}$  definierar en kontraktion  $F : X \rightarrow X$ . Visa dessutom, att  $F$  saknar fixpunkt i  $X$ . Varför strider inte detta resultat mot Banachs fixpunktssats?
3. Låt  $X = [1, \infty)$  vara utrustad med metriken  $d(x, y) = |x - y|$ . Visa, att funktionen  $F(x) = x + \frac{1}{x}$  uppfyller villkoret

$$d(F(x), F(y)) < d(x, y), \quad x \in X, y \in X, x \neq y.$$

Är  $F$  en kontraktion?

4. Visa, att  $f(x) = \sqrt{x}$  inte är Lipschitzkontinuerlig på intervallet  $I = [0, 1]$ .
5. Uppfyller funktionen  $f(t, x) = e^{t+x}$  det likformiga Lipschitzvillkoret i mängden  $I \times D$ , mao. gäller

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|, \quad t \in I, x, y \in D$$

för något  $L < \infty$  då

- (a)  $I = [0, 1], D = [0, 1]$ ;
- (b)  $I = [0, 1], D = \mathbf{R}$ ;
- (c)  $I = \mathbf{R}, D = \mathbf{R}$ ?