

## Differentiaaliyhtälöt II

1. harjoitus, syksy 2008

1. Osoita, että metrisen avaruuden kontraktio on jatkuva.
2. Olkoon  $X = (0, 1)$  varustettu metriikalla  $d(x, y) = |x - y|$ . Osoita, että  $F(x) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{8}$  määrittelee kontraktion  $F : X \rightarrow X$ . Osoita lisäksi, että  $F$ :llä ei ole kiintopistettä  $X$ :ssä. Miksi tämä tulos ei kumoa Banachin kiintopistelausetta?
3. Olkoon  $X = [1, \infty)$  varustettu metriikalla  $d(x, y) = |x - y|$ . Osoita, että funktio  $F(x) = x + \frac{1}{x}$  toteuttaa ehdon

$$d(F(x), F(y)) < d(x, y), \quad x \in X, y \in X, x \neq y.$$

Onko  $F$  kontraktio?

4. Osoita, että  $f(x) = \sqrt{x}$  ei ole Lipschitzin mielessä jatkuva välillä  $I = [0, 1]$ .
5. Toteuttaako funktio  $f(t, x) = e^{t+x}$  tasaisen Lipschitzin ehdon joukossa  $I \times D$ , ts. päteekö

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|, \quad t \in I, x, y \in D$$

jollekin  $L < \infty$  kun

- (a)  $I = [0, 1], D = [0, 1]$ ;
- (b)  $I = [0, 1], D = \mathbf{R}$ ;
- (c)  $I = \mathbf{R}, D = \mathbf{R}$ ?