Diff.yht. II / harj. 5 / 2-4. 12.2008 / ratk. (JL) / 6 sivua

Viime kerralla kaikki yhtälöt saattoi ratkaista täydelleen, tällä kertaa ei yhtäkään, ei edes ajan t eliminoinnin jälkeen.

Systeemit ovat autonomista muotoa $\dot{x} = \begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix} = f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2)\\ f_2(x_1,x_2)\end{pmatrix}$.

Tasapainokohta on piste $x^* \in \mathbb{R}^2$, jolle $f(x^*)=0$; sellaiseen liittyy triviaaliratkaisu $x(t)=x^* \ \forall t \in \mathbb{R}$.

Tasapainokohdan x^* stabiiliuden tutkimista varten määritetään pisteessä $x=x^*$ Jacobin matriisin $f' = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 \end{pmatrix}$ (kompleksisten) ominaisarvojen λ_1, λ_2 laatu. Jos $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ja $Re\,\lambda_1 < 0$ sekä $Re\,\lambda_2 < 0$, on tasapainokohta stabiili (jopa eksponentiaalisesti). Jos taas $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ja $Re\,\lambda_1 > 0$ tai $Re\,\lambda_2 > 0$, on tasapainokohta epästabiili. (Yllä ei tarvittaisi oletusta $\lambda_1 \neq \lambda_2$.)

Faasikuviota varten piirretään näkyviin nuolin f_1:n ja f_2:n merkit esim. seuraavasti (tasapainokohtien joukon komplementissa).

$f_1(x_1,x_2)$	$f_2(x_1,x_2)$	
>0	>0	↗
>0	<0	↘
<0	>0	↖
<0	<0	↙
>0	$=0$	→
<0	$=0$	←
$=0$	>0	↑
$=0$	<0	↓

Nämä nuolet piirretään jokaiselle käyrälle, jolla $f_1=0$, ja jokaiselle käyrälle, jolla $f_2=0$ sekä näiden käyrien erottamiin alueisiin.

Huom. Kannattaa ensin piirtää vaaka- ja pystysuorat nuolet. Usein jo näistä voi päätellä vinojen nuolten suunnat, sillä jatkuvina funktioina f_1 ja f_2 eivät yhtenäisessä joukossa voi vaihtaa merkkiään saamatta arvoa nolla.

Sivulla 6 on määritelty pysty- ja vaakasuorien nuolten suunnat ja paikat tehtävän 1 eri kohdissa

1a $\begin{cases} \dot x_1 = x_1^2 - x_2 \\ \dot x_2 = 1 - x_1^2 - x_2^2 \end{cases}$ Tpl:t $\begin{cases} x_2 = x_1^2 \text{ (par.)} \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \text{ (ymp.)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1^2 \; (\geq 0) \\ x_2^2 + x_2 - 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $(x_1, x_2) = (\pm\sqrt{a}, a)$, jossa $a = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$

$f'(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -1 \\ -2x_1 & -2x_2 \end{pmatrix}$; $f'(\sqrt{a}, a) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{a} & -1 \\ -2\sqrt{a} & -2a \end{pmatrix}$, $f'(-\sqrt{a}, a) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{a} & -1 \\ 2\sqrt{a} & -2a \end{pmatrix}$

$f'(\sqrt{a}, a)$:n KY: $\lambda^2 - 2(\sqrt{a} - a)\lambda - (4a\sqrt{a} + 2\sqrt{a}) = 0$

diskriminantti: $\Delta = (\sqrt{a} - a)^2 + (4a\sqrt{a} + 2\sqrt{a}) > 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ja $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

$\lambda_1 \lambda_2 = -(4a\sqrt{a} + 2\sqrt{a}) < 0 \Rightarrow \lambda_1 > 0 > \lambda_2$ tai $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

Siis tpl $(\sqrt{a}, a)$ on epästabiili (satulapiste)

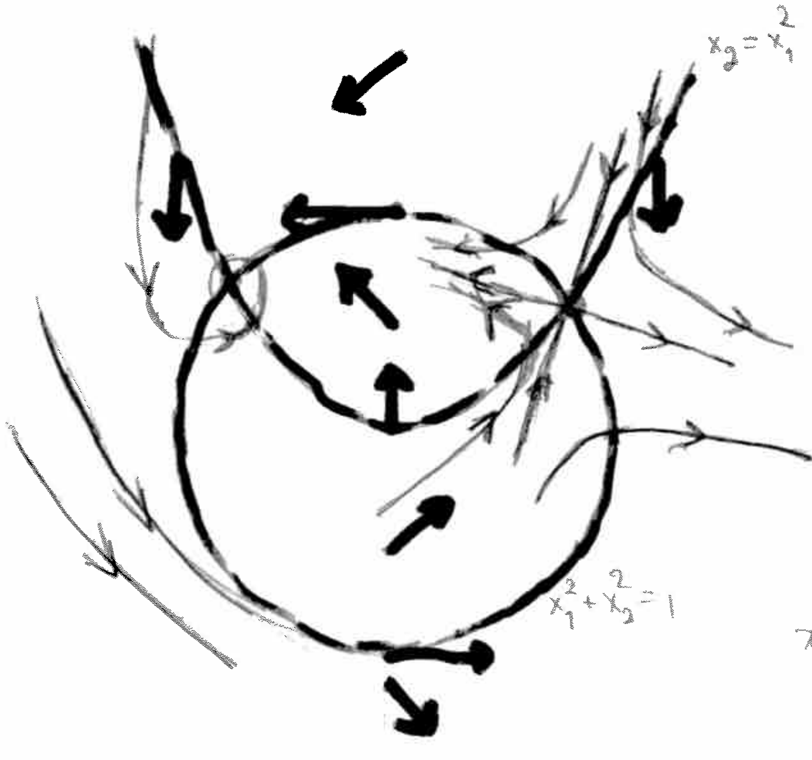
$f'(-\sqrt{a}, a)$:n KY: $\lambda^2 + 2(\sqrt{a} + a)\lambda + (4a\sqrt{a} + 2\sqrt{a}) = 0$

$\Delta = (\sqrt{a} + a)^2 - (4a\sqrt{a} + 2\sqrt{a}) = (a + a^2) - (2a\sqrt{a} + 2\sqrt{a}) = 1 - 2\sqrt{a}\,\overbrace{(a+1)}^{> 1 > \sqrt{a}}$

$< 1 - 2a = 1 - (\sqrt{5} - 1) = 2 - \sqrt{5} < 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$\mathrm{Re}\,\lambda_1 = \mathrm{Re}\,\lambda_2 \left[= \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)\right] = -(\sqrt{a} + a) < 0$

Siis tpl $(-\sqrt{a}, a)$ on (jopa eksponentiaalisesti) stabiili



Joitain ratkaisukäyriä on hahmoteltu.

Erityisesti ne, joille

$x(t) \to (\sqrt{a}, a)$,

kun $t \to \infty$ tai $t \to -\infty$

(oikeastaan, kun $t \to t_0-$ sopivalla $t_0 \leq \infty$ tai $t \to t_0+$ sopivalla $t_0 \geq -\infty$).

(1b) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_1 = x_1(x_1 - 2x_2 + 1) \\ \dot{x}_2 = 3x_1x_2 - x_2^2 = x_2(3x_1 - x_2) \end{cases}$

Tpk:t: $\begin{cases} x_1 = 0 \text{ tai } x_1 - 2x_2 + 1 = 0 \\ x_2 = 0 \text{ tai } 3x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \iff (x_1, x_2) \in \underline{\{(0,0), (-1,0), (\tfrac{1}{5}, \tfrac{3}{5})\}}$

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 + 1 & -2x_1 \\ 3x_2 & 3x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}$$

$f'(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ diagonaalinen $\Rightarrow$ omin. arvot $\lambda_1 = 1 > 0$ ja $\lambda_2 = 0$

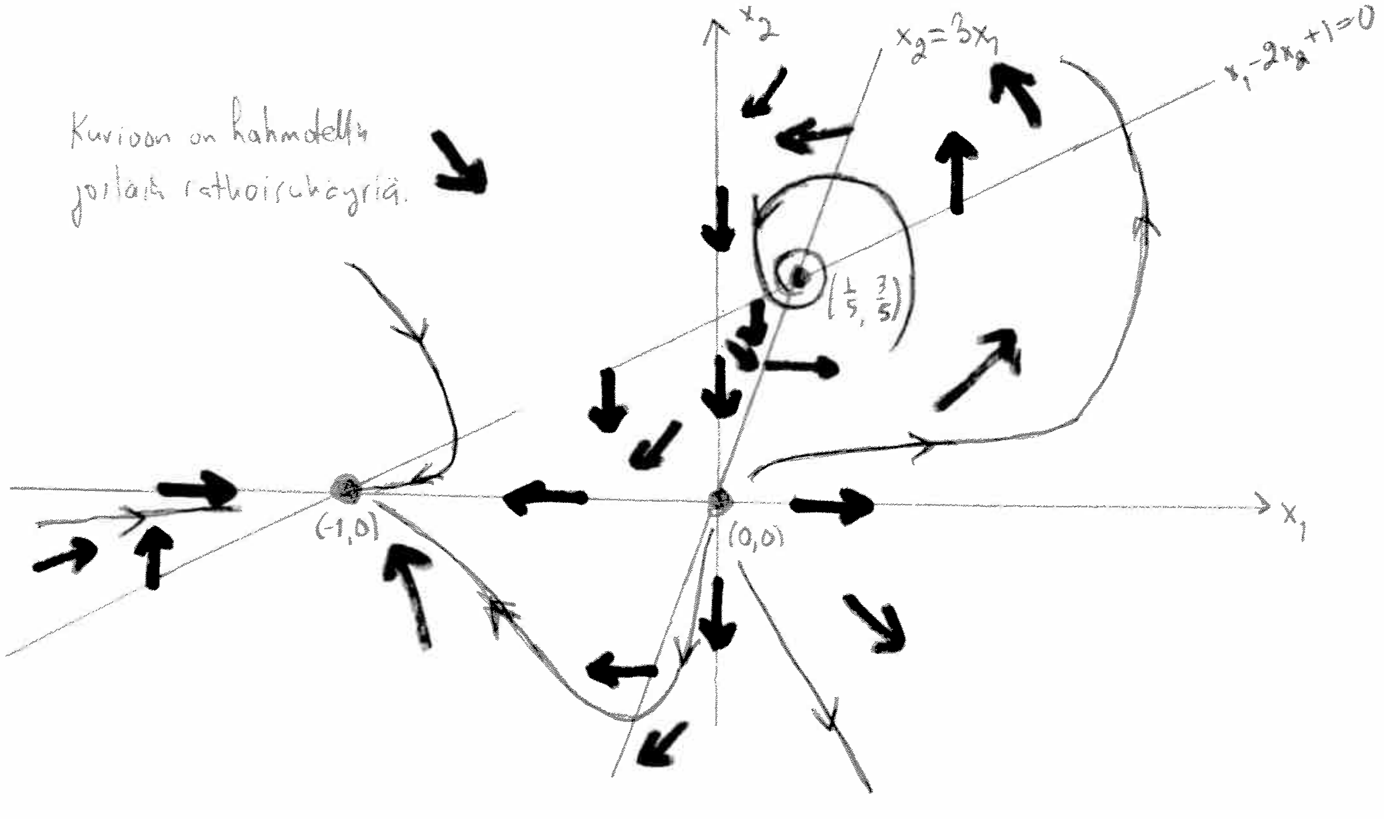
$\Rightarrow$ $\underline{(0,0) \text{ on epästabiili tpk}}$ / omin.vrt λ_1: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, λ_2: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Huom. Saataisiin sepvat dy:t $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(x_1+1) \\ x_2 \equiv 0 \end{cases}$ ja $\begin{cases} x_1 \equiv 0 \\ \dot{x}_2 = -x_2^2 \end{cases}$

$f'(-1,0) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ yläkolmiomatr. $\Rightarrow$ omin. arvot $\lambda_1 = -1 < 0$ ja $\lambda_2 = -3 < 0$

$\Rightarrow$ $\underline{(-1,0) \text{ on (yps. eksp.) stabiili tpk}}$ omin.vrt.: λ_1: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, λ_2: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$f'(\tfrac{1}{5}, \tfrac{3}{5}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{9}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$ KY $\lambda^2 + \frac{2}{5}\lambda + \frac{15}{25} = (\lambda + \frac{1}{5})^2 + \frac{14}{25} = 0$

$\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 = -\frac{1}{5} < 0 \Rightarrow$ $\underline{(\tfrac{1}{5}, \tfrac{3}{5}) \text{ on (eksp.) stab. tpk}}$



1 c

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(1-\frac{1}{2}x_1) - \frac{2x_1}{1+x_1}x_2 = \frac{2x_1}{1+x_1}\left[\frac{1}{4}(1+x_1)(2-x_1) - x_2\right] \\ \dot{x}_2 = \frac{x_1}{1+x_1}x_2 - \frac{1}{2}x_2 = x_2\frac{x_1-1}{2(1+x_1)} \end{cases}$$

Systeemi ei ole määritelty suoralle $x_1 = -1$.

Tpkt: $\begin{cases} x_1 = 0 \text{ tai } x_2 = \frac{1}{4}\underbrace{(1+x_1)}_{\neq 0}(2-x_1)^{(par.)} \\ x_2 = 0 \text{ tai } x_1 = 1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow (x_1, x_2) \in \{(0,0), (1,\frac{1}{2}), (2,0)\}$

$$f'(x) = \begin{bmatrix} 1 - x_1 - \frac{2x_2}{(1+x_1)^2} & -\frac{2x_1}{1+x_1} \\ \frac{x_2}{(1+x_1)^2} & \frac{x_1-1}{2(1+x_1)} \end{bmatrix}$$

$f'(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ om.arvot $\lambda_1 = 1 > 0$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2} < 0$ $\Rightarrow$ (0,0) on epästab tpk (satulapiste)

om.vrit $\lambda_1: \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_2: \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$f'(1,\frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -1 \\ \frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix}$ KY $\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{8} = (\lambda + \frac{1}{8})^2 + \frac{7}{64} = 0$

$\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $Re\lambda_1 = Re\lambda_2 = -\frac{1}{8} < 0$

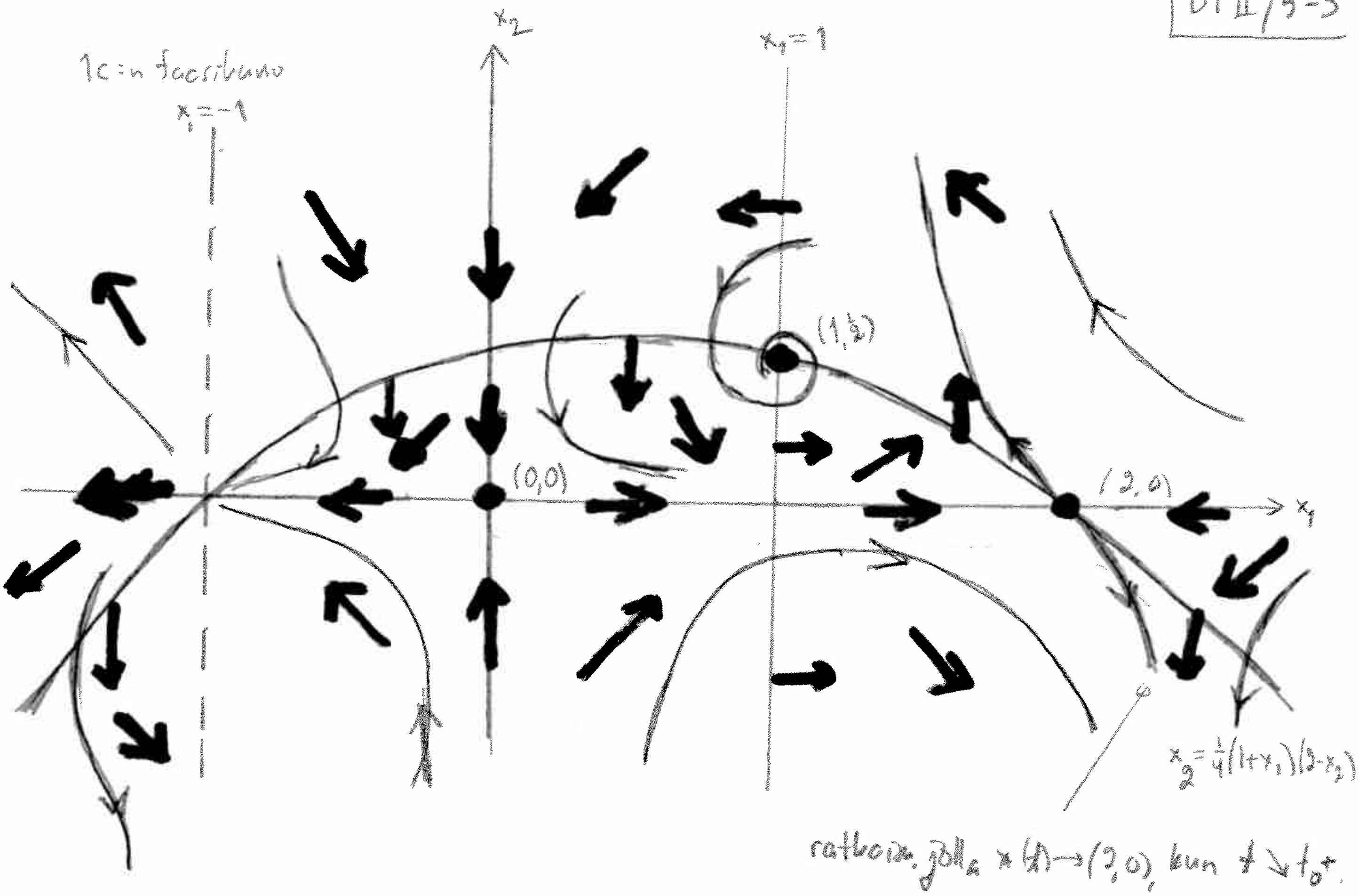
$\Rightarrow (1,\frac{1}{2})$ on (eksp.) stab. tpk

$f'(2,0) = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ yläkolmiomatr. $\Rightarrow \lambda_1 = -1 < 0$, $\lambda_2 = \frac{1}{6} > 0$

$\Rightarrow$ (2,0) on epästab tpk (satulapiste)

om.vrit $\lambda_1: \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_2: \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{7}{8} \end{bmatrix}$

Faasikuva seur. sivulla



② $\ddot{x} + (1+x^2)\dot{x} + x = 0$ (epälin.)

$$\underset{\substack{x_1 = x\\ x_2=\dot{x}}}{\iff} \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -(1+x_1^2)x_2 - x_1 \end{cases}$$

Tpk:t. $\begin{cases} x_2 = 0 \\ -(1+x_1^2)x_2 - x_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \iff (x_1,x_2)=(0,0)$

Tasapainotila $(0,0)$ vastaa alkuper. yhtälön alkuarvotehtävää $\begin{cases} x(0)=0 \\ \dot{x}(0)=0, \end{cases}$ jonka ratkaisu on nollafktio $x(t)=0\ \forall t\in\mathbb{R}$; tällä on $\dot{x}(t)=0\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Tulos tarkoittaa alkuperäiselle yhtälölle seuraavaa:

1° $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: $|x(0)|<\delta$ ja $|\dot{x}(0)|<\delta$ $\Longrightarrow |x(t)|<\varepsilon$ ja $|\dot{x}(t)|<\varepsilon\ \forall t\geq 0$.

2° $\exists\delta, M, \gamma>0$: $|x(0)|<\delta$ ja $|\dot{x}(0)|<\delta$ $\Longrightarrow |x(t)|\leq Me^{-\gamma t}$ ja $|\dot{x}(t)|\leq Me^{-\gamma t}\ \forall t\geq 0$.

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2x_1x_2-1 & -(1+x_1^2) \end{pmatrix}$$

$$f'(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

KY $\lambda^2+\lambda+1 = (\lambda+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}=0$

$\Rightarrow \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $\mathrm{Re}\,\lambda_1=\mathrm{Re}\,\lambda_2=-\frac{1}{2}<0$

$\Rightarrow$ origo $(0,0)$ on (eksponent.) stabiili tpk.

(1) Laskuja nuolien suunnan määrittämiseksi käyrillä $f_1^{-1}(0)$ ja $f_2^{-1}(0)$:

(1a)

$x_2 = x_1^2$: $\quad f_1 = 0$

$f_2 = 1 - x_1^2 - x_2^2 \Rightarrow f_2 > 0$ ympyrän sisällä ja $f_2 < 0$ ympyrän ulkopuolella

$x_1^2 + x_2^2 = 1$. $\quad f_2 = 0$

$f_1 = x_1^2 - x_2 \Rightarrow f_1 > 0$ paraabelin alapuolella ja $f_1 < 0$ paraabelin yläpuolella

---

(1b) Laskuja:

$\boxed{x_1 = 0}$ $\quad f_1 = 0$

$f_2 = -x_2^2 < 0$, kun $x_2 \neq 0$

$\boxed{x_1 - 2x_2 + 1 = 0}$ $\quad f_1 = 0$

$f_2 = x_2\left(3(2x_2 - 1) - x_2\right) = x_2(5x_2 - 3)$

$\Rightarrow f_2 > 0$, kun $x_2 < 0$ tai $x_2 > \frac{3}{5}$

$f_2 < 0$, kun $0 < x_2 < \frac{3}{5}$

$\boxed{x_2 = 0}$ $\quad f_2 = 0$

$f_1 = x_1(x_1 + 1) \Rightarrow f_1 > 0$, kun $x_1 < -1$ tai $x_1 > 0$

$f_1 < 0$, kun $-1 < x_1 < 0$

$\boxed{3x_1 - x_2 = 0}$ $\quad f_2 = 0$

$f_1 = x_1(x_1 - 6x_1 + 1) = x_1(1 - 5x_1)$

$\Rightarrow f_1 > 0$, kun $0 < x_1 < \frac{1}{5}$

$f_1 < 0$, kun $x_1 < 0$ tai $x_1 > \frac{1}{5}$

(1c) Laskuja:

$\boxed{x_1 = 0}$ $\quad f_1 = 0$

$f_2 = -\frac{1}{2}x_2 \Rightarrow f_2 > 0$, kun $x_2 < 0$

$f_2 < 0$, kun $x_2 > 0$

$\boxed{x_2 = 0}$ $\quad f_2 = 0$

$f_1 = x_1(1 - \frac{1}{2}x_1)$

$\Rightarrow f_1 > 0$, kun $0 < x_1 < 2$

$f_1 < 0$, kun $x_1 < 0$ tai $x_1 > 2$

$\boxed{x_1 = 1}$ $\quad f_2 = 0$

$f_1 = \frac{1}{2} - x_2 \Rightarrow f_1 > 0$, kun $x_2 < \frac{1}{2}$

$f_1 < 0$, kun $x_2 > \frac{1}{2}$

$\boxed{x_2 = \frac{1}{4}(1 + x_1)(2 - x_1)}$ $\quad f_1 = 0$

$f_2 = \frac{1}{8}(x_1 - 1)(2 - x_1)$

$\Rightarrow f_2 > 0$, kun $1 < x_1 < 2$

$f_2 < 0$, kun $x_1 < 1$ tai $x_1 > 2$