Differentiaaliyhtälöt II, harjoitus 4, 25.–27.11.2008, ratkaisut (JL), neljä sivua

1. Tarkastellaan lineaarista alkuarvotehtävää $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $x(0) = \xi$. On tutkittava origon stabiilisuutta (toisin sanoen, on tutkittava, onko origo epästabiili, stabiili, asymptoottisesti stabiili, eksponentiaalisesti stabiili) seuraavien matriisien A tapauksessa.

Ratk. Tehtävässä $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ on kiinteä vakiomatriisi ja $\xi \in \mathbb{R}^3$ mielivaltainen vektori; kyseessä on samaan differentiaaliyhtälöön liittyvien kaikkien eri alkuarvo-ongelmien perhe. Kullakin $\xi \in \mathbb{R}^3$ merkitköön $t \mapsto u(t;\xi)$ tämän alkuarvo-ongelman yksikäsitteistä ratkaisua $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ (tai lyhyesti $t \mapsto x(t)$, jos ξ pidetään mielessä). Origo $\xi^* = 0 \in \mathbb{R}^3$ on *tasapainokohta*, sillä koska $A0 = 0$, niin selvästi on $u(t;\xi^*) = \xi^*\ \forall t \in \mathbb{R}$.

(a) $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Määritetään A:n ominaisarvot: $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -4 & -2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$ $-(\lambda+1)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^2(\lambda-1) = 0 \iff \lambda_1 = \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 1.$

Koska siis on olemassa ominaisarvo, jonka reaaliosa on positiivinen, niin luennoilla esitetyn nojalla origo ei ole stabiili tasapainokohta eli se on siis <u>epästabiili</u> tasapainokohta. Osoitetaan tämä kuitenkin vielä suoraankin. Valitaan esimerkiksi $\varepsilon = 1 > 0$. Olkoon $\delta > 0$ mielivaltainen. Valitaan sellainen ominaisarvoon $\lambda = 1$ liittyvä ominaisvektori ξ, jolla $0 < |\xi - 0| < \delta$. (Yksityiskohtaisemmin toimien määritetään ensin ominaisavaruus: $(A-I)\xi = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \xi_2 = 0$ ja $\xi_3 = -\xi_1 \iff \xi = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(a \in \mathbb{R})$. Nyt valitaan sellainen $a > 0$, jolle $a < \delta/\sqrt{2}$; tällöin $\xi = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T$ on vaadittu.)

Saamme, että $u(t;\xi) = e^t\xi\ \forall t \in \mathbb{R}$, jolloin $|u(t;\xi) - 0| = e^t|\xi| \to \infty$, kun $t \to \infty$. On siis olemassa $t \geq 0$, jolla $|u(t;\xi) - 0| \geq \varepsilon$. Täten stabiiliusehto (i) alla (b)-kohdassa ei voi olla voimassa.

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Määritetään A:n ominaisarvot: $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$ $\begin{vmatrix} 0 & (\lambda+1)^2 & \lambda+1 \\ -1 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & \lambda+1 & -(\lambda+1) \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^2\begin{vmatrix} 0 & \lambda+1 & 1 \\ 1 & 2+\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2\begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^2(\lambda+2) = 0 \iff$ $\lambda_1 = \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = -2.$

Koska siis kaikkien ominaisarvojen reaaliosat ovat negatiiviset, niin luennoilla esitetyn nojalla origo on <u>eksponentiaalisesti stabiili</u> tasapainokohta, jolloin se on myös <u>asymptoottisesti stabiili</u> ja täten myös <u>stabiili</u>. Osoitetaan tämä kuitenkin vielä suoraankin. Tätä varten katsotaan ensin, voidaanko ominaisvektoreista muodostaa $\mathbb{R}^3$:n kanta:

$\lambda = -1$: $(A+I)\xi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\xi = 0 \iff \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \iff \xi = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{R})$

$\lambda = -2$: $(A+2)\xi = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\xi = 0 \iff \xi_2 = \xi_3 = -\xi_1 \iff \xi = a\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(a \in \mathbb{R})$

Saatiin siis ominaisvektoreiden $\xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\xi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ja $\xi^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ muodostama $\mathbb{R}^3$:n kanta ja vastaava differentiaaliyhtälön perusjärjestelmä $(e^{-t}\xi^1, e^{-t}\xi^2, e^{-2t}\xi^3)$.

Nyt, jos $\xi \in \mathbb{R}^3$ esitetään muodossa $\xi = \sum_{k=1}^3 \xi'_k\xi^k$ kertoimin $\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3 \in \mathbb{R}$, niin $u(t;\xi) = e^{-t}\xi'_1\xi^1 + e^{-t}\xi'_2\xi^2 + e^{-2t}\xi'_3\xi^3\ \forall t \in \mathbb{R}$. Turvaudutaan Topologia I:n tietoihin: Asettamalla $\|\xi\| = \sum_{k=1}^3 |\xi'_k||\xi^k|$ saadaan $\mathbb{R}^3$:lle normi $\xi \mapsto \|\xi\|$, ja koska kaikki $\mathbb{R}^n$:n normit ovat bi-Lipschitz-ekvivalentit keskenään [Jussi Väisälän kirja *Topologia I*, 2002, Lause 15.17], niin on olemassa vakiot $\alpha, \beta > 0$, joille $\alpha|\xi| \leq \|\xi\| \leq \beta|\xi|\ \forall \xi \in \mathbb{R}^3$. Koska $e^{-2t} \leq e^{-t}\ \forall t \geq 0$, niin täten on

(*) $$|u(t;\xi)| \leq e^{-t}\sum_{k=1}^3 |\xi'_k||\xi^k| \leq \beta e^{-t}|\xi| \quad \forall t \geq 0.$$

Ominaisuudesta (*) seuraa, että $|u(t;\xi)| \le \beta|\xi| \ \forall t \ge 0$. Täten voidaan päätellä valitsemalla kullakin $\varepsilon > 0$ luku $\delta = \varepsilon/\beta > 0$, että seuraava seikka pätee:

(i) *Jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa $\delta > 0$, jolla ehdosta $|\xi - 0| < \delta$ seuraa, että $|u(t;\xi) - 0| < \varepsilon \ \forall t \ge 0$.*

Ominaisuus (i) on määritelmä sille, että tasapainokohta 0 on *stabiili*. Tasapainokohta, joka ei ole stabiili, on *epästabiili*.

Ominaisuudesta (*) seuraa myös, että jos valitaan esimerkiksi $\delta = 1 > 0$, $M = \beta > 0$ (tai yleisemmin ensin $\delta > 0$ mielivaltaisesti ja sitten $M = \beta\delta$) ja $\gamma = 1 > 0$, niin seuraava seikka pätee:

(ii) *On olemassa $\delta, M, \gamma > 0$ niin, että ehdosta $|\xi - 0| < \delta$ seuraa, että $|u(t;\xi) - 0| \le Me^{-\gamma t} \ \forall t \ge 0$.*

Ominaisuudet (i) ja (ii) ovat yhdessä määritelmä sille, että tasapainokohta 0 on *eksponentiaalisesti stabiili*. Ominaisuudesta (ii) saadaan seuraava ominaisuus:

(iii) *On olemassa $\delta > 0$, jolla ehdosta $|\xi - 0| < \delta$ seuraa, että $u(t;\xi) \to 0$, kun $t \to \infty$.*

Ominaisuudet (i) ja (iii) ovat yhdessä määritelmä sille, että tasapainokohta 0 on *asymptoottisesti stabiili*.

(c) $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Määritetään A:n ominaisarvot: $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & -2 \\ -1 & -1-\lambda & -1 \\ 3 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$
$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & -2 \\ -1 & -1-\lambda & -1 \\ -\lambda & -\lambda & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 2+\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 2+\lambda & 1 & 2 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\lambda^2 \begin{vmatrix} 2+\lambda & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\lambda^3 = 0 \iff$
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Suurin ominaisarvojen reaaliosista on siis 0. Tästä ei voida vielä päätellä mitään, sillä ominaisarvo $\lambda = 0$ on karakteristisen polynomiyhtälön useampikertainen juuri, nimittäin kolminkertainen juuri eli sen *algebrallinen kertaluku* on 3. On tutkittava, mikä on tähän ominaisarvoon liittyvän ominaisavaruuden dimensio eli ominaisarvon *geometrinen kertaluku*: onko se sama kuin ominaisarvon algebrallinen kertaluku (jolloin ominaisarvo 0 on *degeneroitumaton*) vai pienempi (jolloin ominaisarvo 0 on *degeneroitunut*). Nyt

$(A - 0I)\xi = 0 \iff \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xi = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi = 0 \iff \xi_2 = 0$ ja $\xi_3 = -\xi_1 \iff$

$\xi = a \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(a \in \mathbb{R})$. Ominaisavaruus on siis 1-ulotteinen, joten ominaisarvo 0 on degeneroitunut. Tällöin luentojen nojalla tasapainokohta 0 on <u>epästabiili</u>. Osoitetaan tämä vielä suoraankin määrittämällä $x(t) = u(t;\xi)$. Perusjärjestelmää ei nyt ole ehkä helppo kirjoittaa suoraan, joten käytetään **eliminointikeinoa** (alempana on vaihtoehtoinen yritemenetelmä):

$$\dot{x} = Ax \iff \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - x_2 - 2x_3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - x_3 \\ \dot{x}_3 = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{cases}.$$

Laskemalla nämä yhtälöt puolittain yhteen saadaan $\dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \dot{x}_3 = 0$ eli $x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Tällöin $\dot{x}_2 = -(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) \iff x_2(t) = -(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)t + \xi_2$. Siis $\dot{x}_1 = x_2 - 2(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) = -(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)t + (-2\xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3) \iff x_1(t) = -\frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)t^2 + (-2\xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3)t + \xi_1$. Tällöin $x_3(t) = (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) - x_1(t) - x_2(t) = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)t^2 + (3\xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3)t + \xi_3$. Siis

$$u(t;\xi) = t^2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) \\ 0 \\ \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2\xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 \\ -\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 \\ 3\xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 \end{pmatrix} + \xi = \tfrac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)t^2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + tA\xi + \xi.$$

Katsotaan vaihtoehtoista **yritemenetelmää**. Tehdään arvaus $x(t) = t^2\eta + t\zeta + \xi$ vektorein $\eta, \zeta \in \mathbb{R}^3$, jolloin $x(0) = \xi$. Nyt $\dot{x} = Ax \iff 2t\eta + \zeta = t^2 A\eta + tA\zeta + A\xi \ \forall t \in \mathbb{R} \iff A\eta = 0$, $A\zeta = 2\eta$ ja $A\xi = \zeta \iff \eta =$
$a \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ jollain $a \in \mathbb{R}$, $\zeta = A\xi$ ja $2\eta = A^2\xi = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xi = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xi$
$\iff a = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)$. Tulee siis sama ratkaisu kuin yllä.

Nyt voidaan osoittaa, että tasapainokohta 0 on epästabiili. Valitaan esimerkiksi $\varepsilon = 1 > 0$. Olkoon $\delta > 0$ mielivaltainen. Koska joukko $\{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0\}$ on origon kautta kulkeva taso, niin voidaan valita sellainen $\xi \in \mathbb{R}^3$, jolla $|\xi - 0| < \delta$ ja $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \neq 0$. Tällöin selvästi $|u(t;\xi) - 0| \to \infty$, kun $t \to \infty$ (riittää tutkia toista koordinaattifunktiota $t \mapsto -(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)t + \xi_2$), joten $|u(t;\xi) - 0| \geq \varepsilon$ jollain $t \geq 0$.

(d) $A = \begin{pmatrix} -8 & -2 & -6 \\ 4 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}$. Määritetään A:n ominaisarvot: $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -8-\lambda & -2 & -6 \\ 4 & 1-\lambda & 3 \\ 8 & 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} =$
$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -\lambda \\ 4 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 2\lambda & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda^2(\lambda + 1) =$
$0 \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = -1$.
Jälleen ominaisarvojen reaaliosista suurin on 0 ja ominaisarvon 0 algebrallinen kertaluku on 2 ja siis suurempi kuin 1. Nytkään ei voida suoraan päätellä mitään tasapainokohdan 0 stabiiliudesta, vaan on tutkittava, onko ominaisarvo 0 degeneroitunut vai ei:
$(A - 0I)\xi = 0 \iff \begin{pmatrix} -8 & -2 & -6 \\ 4 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xi = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi = 0 \iff 4\xi_1 + \xi_2 + 3\xi_3 = 0$; ominaisarvoon 0 liittyvä ominaisavaruus on siis 2-ulotteinen, joten ominaisarvo 0 on degeneroitumaton. Täten luentojen nojalla tasapainokohta 0 on <u>stabiili</u>. Osoitetaan tämä vielä suoraankin. Valitaan ominaisavaruudesta kaksi lineaarisesti riippumatonta vektoria ξ^1 ja ξ^2; esim. $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ja $\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Valitaan myös jokin ominaisarvoon -1 liittyvä ominaisvektori ξ^3; esim. $\xi^3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ kävisi kuten sijoittamalla nähtäisiin. Tällöin (ξ^1, ξ^2, ξ^3) on $\mathbb{R}^3$:n kanta ja $(\xi^1, \xi^2, e^{-t}\xi^3)$ siis differentiaaliyhtälön perusjärjestelmä.

Esitetään $\xi \in \mathbb{R}^3$ muodossa $\xi = \sum_{k=1}^3 \xi'_k \xi^k$ kertoimin $\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3 \in \mathbb{R}$. Tällöin $u(t;\xi) = \xi'_1\xi^1 + \xi'_2\xi^2 + e^{-t}\xi'_3\xi^3$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Kuten (b)-kohdassa löytyy vain kannasta (ξ_1, ξ_2, ξ_3) riippuva vakio $\beta > 0$, jolle $\sum_{k=1}^3 |\xi'_k||\xi^k| \leq \beta|\xi|$. Täten on $|u(t;\xi) - 0| \leq \sum_{k=1}^3 |\xi'_k||\xi^k| \leq \beta|\xi|$ $\forall t \geq 0$. Jos nyt $\varepsilon > 0$ on mielivaltainen ja valitaan $\delta = \varepsilon/\beta > 0$, niin ehdosta $|\xi - 0| < \delta$ seuraa $|u(t;\xi) - 0| < \varepsilon$ $\forall t \geq 0$. Siis origo on tosiaankin stabiili tasapainokohta.

Lisäksi $u(t;\xi) \to \xi'_1\xi^1 + \xi'_2\xi^2$, kun $t \to \infty$. Olkoon $\delta > 0$ mielivaltainen. Voidaan valita $\xi \in \mathbb{R}^3$, jolla $|\xi - 0| < \delta$ ja $\xi'_1\xi^1 + \xi'_2\xi^2 \neq 0$. Nyt ei päde $\lim_{t\to\infty} u(t;\xi) = 0$. Siis tasapainokohta 0 <u>ei ole asymptoottisesti stabiili</u>. Siten tasapainokohta 0 <u>ei ole myöskään eksponentiaalisesti stabiili</u>.

2. On ratkaistava skalaariyhtälö $\dot{x}(t) = -x(t)^3$ ja osoitettava, että origo on asymptoottisesti stabiili muttei eksponentiaalisesti stabiili.

Ratk. Yhtälö on separoituva, ja koska $-x^3 = x \iff x = 0$, on $x(t) = 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$ sen triviaaliratkaisu. Siis origo $0 \in \mathbb{R}$ on tasapainokohta. Koska yhtälön määrittelevä kuvaus $(x,t) \mapsto -x^3$ on polynomi $\mathbb{R}^2$:ssa, niin alkuarvo-ongelman ratkaisun olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen oletukset ovat voimassa. Olkoon $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tällöin alkuehdon $x(0) = \xi$ toteuttavalle ratkaisulle x on $x(t) > 0$ $\forall t$, jos $\xi > 0$, ja $x(t) < 0$ $\forall t$, jos $\xi < 0$. Nyt $-\int_\xi^x \frac{dz}{z^3} = \int_0^t d\tau \iff \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2\xi^2} = t \iff \frac{1}{x^2} = 2t + \frac{1}{\xi^2} \iff x^2 = \frac{\xi^2}{2t\xi^2 + 1} \iff x(t) = \frac{\xi}{\sqrt{1 + 2t\xi^2}}$ $\forall t > -\frac{1}{2\xi^2}$. Tämä esitys on voimassa myös, jos $\xi = 0$.

Saadaan, että $|x(t)| \leq |\xi|$ $\forall t \geq 0$. Täten, jos $\varepsilon > 0$ on mielivaltainen ja valitaan $\delta = \varepsilon > 0$, niin ehdosta $|\xi - 0| < \delta$ seuraa $|x(t) - 0| < \varepsilon$ $\forall t \geq 0$. Siis origo on stabiili tasapainokohta. Lisäksi, jos $\xi \neq 0$, niin $|x(t)| \leq |\xi|/\sqrt{1 + 2t\xi^2} \to 0$, kun $t \to \infty$, joten $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ kaikilla $\xi \in \mathbb{R}$. Täten origo on jopa <u>asymptoottisesti stabiili</u> tasapainokohta (tähän riittäisi, että on olemassa $\delta > 0$ niin, että raja-arvoehto pätee vektoreille ξ, joilla $|\xi - 0| < \delta$). Huomataan, että nollaanmeno on tyyppiä $t^{-1/2}$, joka silloin on hitaampaa kuin eksponentiaalinen nollaanmeno. Mutta osoitetaan tarkasti, että origo <u>ei ole eksponentiaalisesti stabiili</u> tasapainokohta. Tehdään antiteesi, että se on; tällöin saadaan $\delta, M, \gamma > 0$, joille ehdosta $|\xi - 0| < \delta$ seuraa, että $|x(t) - 0| \le Me^{-\gamma t}$ $\forall t \ge 0$. Valitaan nyt sellainen $\xi \in \mathbb{R}$, jolla $0 < |\xi| < \delta$. Tällöin $\dfrac{e^{\gamma t}}{\sqrt{1+2t\xi^2}} \le \dfrac{M}{|\xi|}$ $\forall t \ge 0$. Mutta $e^{\gamma t}/\sqrt{1+2t\xi^2} \to \infty$, kun $t \to \infty$, ja tämä on ristiriita.

3. Tarkastellaan kaksiulotteista, napakoordinaateissa annettua differentiaaliyhtälöryhmää $\begin{cases} \dot r = 1 - r \\ \dot\theta = \sin^2 \dfrac{\theta}{2} \end{cases}$. Napakulmat θ ja $\theta + n2\pi$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ identifioidaan keskenään. Karteesiset koordinaatit saadaan muunnoskaavoista $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

(a) On ratkaistava yhtälöryhmä.

(b) On osoitettava, että $(r, \theta) = (1, 0)$ eli $(x, y) = (1, 0)$ on tasapainokohta ja että se on epästabiili vaikka yhtälöryhmän *kaikki* ratkaisut suppenevat sitä kohti.

Ratk. (a) Molemmat yhtälöt ovat separoituvia, ja koska $1 - r = 0 \iff r = 1$ ja $\sin^2 \dfrac{\theta}{2} = 0 \iff \dfrac{\theta}{2} = n\pi$ $(n \in \mathbb{Z}) \iff \theta = 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$, niin niillä on triviaaliratkaisut $r(t) = 1$ $\forall t \in \mathbb{R}$ ja $\theta = n2\pi$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{Z})$. Olkoon $\varrho \ge 0$ ja $\alpha \in [0, 2\pi[$. Etsitään ratkaisut alkuehdoin $r(0) = \varrho$ ja $\theta(0) = \alpha$.

Koska $\dot r = 1 - r \iff \dot r + r = 1 \iff (d/dt)(e^t r) = e^t \iff e^t r = e^t + C \iff r = 1 + Ce^{-t}$ ja koska $r(0) = 1 + C = \varrho \iff C = \varrho - 1$, niin $\underline{r(t) = 1 + (\varrho - 1)e^{-t}}$. Koska on oltava $r(t) \ge 0$, niin tapauksessa $\varrho < 1$ on oltava $t \ge -\ln(1/(1-\varrho))$ (< 0).

Oletetaan $0 < \alpha < 2\pi$. Tällöin $0 < \theta(t) < 2\pi$ $\forall t$. Saadaan, että $\displaystyle\int_\alpha^\theta \frac{d\beta}{\sin^2 \frac{\beta}{2}} = \int_0^t d\tau \iff 2\cot\frac{\alpha}{2} - 2\cot\frac{\theta}{2} = t \iff \underline{\theta(t) = 2\,\mathrm{arccot}\left(\cot\frac{\alpha}{2} - \frac{t}{2}\right)}$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Muistetaan, että arccot on vähenevä bijektio $\mathbb{R} \to\,]0, \pi[$. (Siis tapauksessa $\alpha > 0$ on θ on aidosti kasvava, mikä nähdään myös siitä, että $\dot\theta(t) > 0$.)

(b) Koska $r \equiv 1$ ja $\theta \equiv 0$ olivat triviaaliratkaisut (jälkimmäinen mod 2π), niin yhtälöryhmällä on triviaaliratkaisu $(x(t), y(t)) = (1\cos 0, 1\sin 0) = (1, 0)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Siis $(x, y) = (1, 0)$ on tasapainokohta.

Jos $\xi \in \mathbb{R}^2$ ja kirjoitetaan $\varrho = |\xi|$, niin on olemassa $\alpha \in [0, 2\pi[$ (yksikäsitteinen, jos $\varrho > 0$), jolla $\xi = (\varrho\cos\alpha, \varrho\sin\alpha)$; näin saadaan ratkaisu $(x(t), y(t)) = (r(t)\cos\theta(t), r(t)\sin\theta(t))$, jolla $(x(0), y(0)) = \xi$. Koska $r(t) = 1 + (\varrho - 1)e^{-t} \to 1$ ja $\theta(t) = 2\,\mathrm{arccot}\big(\cot(\alpha/2) - t/2\big) \to 2\pi$, kun $t \to \infty$, niin $(x(t), y(t)) \to (1, 0)$, kun $t \to \infty$.

Osoitetaan, että tasapainokohta $(x, y) = (1, 0)$ on epästabiili. Valitaan $\varepsilon = 2 > 0$. Olkoon $\delta > 0$ mielivaltainen. Valitaan $\varrho = 1$ ja sellainen α, jolla $0 < \alpha < \min(\delta, \pi)$. Tällöin yksikköympyrän pisteelle ξ on $|\xi - (1, 0)| \le \theta < \delta$. Koska $\mathrm{arccot}\, 0 = \pi/2$ ja $0 < \alpha/2 < \pi/2$, niin $(x(t), y(t)) = (-1, 0) \iff \theta(t) = \pi \iff \cot(\alpha/2) - t/2 = 0 \iff t = t_\alpha = 2\cot(\alpha/2) > 0$. Siis $|(x(t_\alpha), y(t_\alpha)) - (1, 0)| = 2 \ge \varepsilon$. Sanallisesti: *Jos lähdetään tasapainopistettä kuinka lähellä vain olevasta ylemmän avoimen yksikköpuoliympyrän pisteestä, niin liikutaan koko ajan yksikköympyrällä vastapäivään tasapainopistettä rajatta lähestyen, ja tällöin välttämättä käydään tasapainopistettä vastapäätä olevan yksikköympyrän pisteen kautta; siksi tasapainokohta ei voi olla stabiili.*