Differentiaaliyhtälöt II, harjoitus 3, 18.–20.11.2008, ratkaisut (JL), kuusi sivua

1. (a) On muunnettava lineaarinen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö

$$\ddot{x}(t) - q(t)x(t) = f(t)$$

yhtäpitäväksi ensimmäisen kertaluvun lineaariseksi kahden skalaariyhtälön systeemiksi.

Ratk. Suuntaa $\Rightarrow$ varten määritellään $z_1 = x$ ja $z_2 = \dot{x}$ sekä $z = (z_1\ z_2)^T$, jolloin saadaan $\dot{z}_1 = \dot{x} = z_2$ ja $\dot{z}_2 = \ddot{x} = qx + f = qz_1 + f$ eli

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) = q(t)z_1(t) + f(t) \end{cases} \iff \dot{z}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q(t) & 0 \end{pmatrix} z(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Suuntaa $\Leftarrow$ varten määritellään $x = z_1$, jolloin saadaan $\ddot{x} = \ddot{z}_1 = \dot{z}_2 = qz_1 + f = qx + f$ eli $\ddot{x}(t) - q(t)x(t) = f(t)$.

(b) Vastaavasti yhtälölle $x^{(4)}(t) + t\ddot{x}(t) + t^2\dot{x}(t) = 1 \iff x^{(4)}(t) = -t^2\dot{x}(t) - t\ddot{x}(t) + 1$ asetetaan $z_1 = x$, $z_2 = \dot{x}$, $z_3 = \ddot{x}$, $z_4 = \dddot{x}$ ja $z = (z_1\ z_2\ z_3\ z_4)^T$, jolloin saadaan

$$\iff \begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) = z_3(t) \\ \dot{z}_3(t) = z_4(t) \\ \dot{z}_4(t) = -t^2 z_2(t) - t z_3(t) + 1 \end{cases} \iff \dot{z}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -t^2 & -t & 0 \end{pmatrix} z(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Määritetään toisen kertaluvun homogeenisen lineaarisen differentiaaliyhtälön $\ddot{x}(t) + 2(1 - \tan^2 t)x(t) = 0$ yleinen ratkaisu väleillä, joilla $t \neq \frac{1}{2}\pi + n\pi$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$.

Osoitetaan ensin, että $x_1(t) = \cos^2 t$ toteuttaa yhtälön. Itse asiassa, koska $\dot{x}_1(t) = -2\cos t \sin t$ ja $\ddot{x}_1(t) = 2(\sin^2 t - \cos^2 t)$, niin

$$\ddot{x}_1(t) + 2(1 - \tan^2 t)x_1(t) = 2(\sin^2 t - \cos^2 t) + 2\left(1 - \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\right)\cos^2 t = 2(\sin^2 t - \cos^2 t) + 2(\cos^2 t - \sin^2 t) = 0.$$

Tunnetusta ratkaisusta x_1 lähtien etsitään sitten **vakion varioinnilla** eli **kertaluvun alentamisella** tästä ratkaisusta lineaarisesti riippumaton toinen ratkaisu. Etsitään siis kahdesti derivoituva funktio f, joka ei ole vakio ja jolla $x_2(t) = f(t)x_1(t) = f(t)\cos^2 t$ toteuttaa yhtälön. Nyt $\dot{x}_2(t) = \dot{f}(t)\cos^2 t - 2f(t)\cos t \sin t$ ja $\ddot{x}_2(t) = \ddot{f}(t)\cos^2 t - 4\dot{f}(t)\cos t \sin t + 2f(t)(\sin^2 t - \cos^2 t)$, jolloin yhtälö toteutuu, jos ja vain jos $\ddot{f}(t)\cos^2 t - 4\dot{f}(t)\cos t \sin t = 0$, sillä $f(t)$:n kerroin on $\ddot{x}_1(t) + 2(1 - \tan^2 t)x_1(t) = 0$, eli jos ja vain jos

$$\ddot{f}(t) - 4\dot{f}(t)\tan t = 0 \iff \dot{v}(t) - 4v(t)\tan t = 0$$

funktiolle $v = \dot{f}$. Tämä on ensimmäisen kertaluvun homogeeninen lineaarinen differentiaaliyhtälö v:lle; sen yleinen ratkaisu on

$$v(t) = Ae^{4\int \tan t\, dt} = Ae^{-4\ln|\cos t|} = \frac{A}{\cos^4 t} \quad (A \in \mathbb{R}).$$

Valitaan $A = 1$, sillä ratkaisu $v \equiv 0$ ei nyt kelpaa. Sijoitus $s = \tan t$ antaa

$$ds = \frac{dt}{\cos^2 t} \quad \text{ja} \quad \frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t = 1 + s^2,$$

jolloin saadaan

$$\int \frac{dt}{\cos^4 t} = \int \frac{1}{\cos^2 t}\frac{dt}{\cos^2 t} = \int (1 + s^2)\, ds = s + \tfrac{1}{3}s^3 = \tan t + \tfrac{1}{3}\tan^3 t.$$

Täten $x_2(t) = f(t)\cos^2 t = (\tan t + \frac{1}{3}\tan^3 t)\cos^2 t = \sin t\cos t(1 + \frac{1}{3}\tan^2 t)$ on etsitty toinen ratkaisu. Siis (x_1, x_2) on yhtälön perusjärjestelmä.
(*Vaihtoehtoisesti voidaan käyttää osittaisintegrointia*, jolloin kaavaa $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$ käyttäen saadaan

$$\begin{aligned} f(t) &= \int v(t)\,dt = \int \frac{dt}{\cos^4 t} = \int \frac{1}{\cos^2 t}\frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \tan t\,\frac{1}{\cos^2 t} - \int \tan t\,\frac{2\sin t}{\cos^3 t}\,dt = \frac{\tan t}{\cos^2 t} - 2\int \frac{\sin^2 t}{\cos^4 t}\,dt \\ &= \frac{\tan t}{\cos^2 t} - 2\int \frac{1}{\cos^4 t}\,dt + 2\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{\tan t}{\cos^2 t} - 2f(t) + 2\tan t. \end{aligned}$$

Ratkaisemalla tämä $f(t)$:lle saatu tavallinen yhtälö tulee

$$f(t) = \tfrac{1}{3}\tan t\left(\frac{1}{\cos^2 t} + 2\right) = \tfrac{1}{3}\tan t(3 + \tan^2 t) = \tan t + \tfrac{1}{3}\tan^3 t.)$$

Luentoversion 9.10.2008 sivujen 49–50 valmis kaava (jossa nyt $\dot{x}(t)$:n kertoimelle on $p(t) = 0$) antaa saman:

$$x_2(t) = x_1(t)\int^t \frac{e^{-\int^\tau p(s)\,ds}}{x_1(\tau)^2}\,d\tau = \cos^2 t\int \frac{dt}{\cos^4 t}.$$

Vaadittu yhtälön yleinen ratkaisu on täten

$$x(t) = C_1\cos^2 t + C_2\sin t\cos t(1 + \tfrac{1}{3}\tan^2 t) \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

3. On osoitettava, että $x(t) = e^t$ toteuttaa yhtälön $\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = 0$ jos ja vain jos kerrointen summalle on $1 + p(t) + q(t) \equiv 0$. Tämä seuraa siitä, että jos $x(t) = e^t$, niin $\ddot{x}(t) = \dot{x}(t) = e^t$.
Tämän huomion nojalla on ratkaistava yhtälö

$$(t-1)\ddot{x}(t) - t\dot{x}(t) + x(t) = 0.$$

Välillä, jolla $t \neq 1$, yhtälöllä on yhtäpitävä normaalimuoto

$$(*) \qquad \ddot{x}(t) - \frac{t}{t-1}\dot{x}(t) + \frac{1}{t-1}x(t) = 0,$$

jonka kerroinfunktioiden summalle on $1 - t/(t-1) + 1/(t-1) = 1 - (t-1)/(t-1) = 0$ kaikilla t. Tiedetään siis, että yhtälöllä (*) on ratkaisu $x(t) = e^t$. Käytetään vakion variointia eli etsitään ei-vakioinen kahdesti derivoituva funktio f, jolla $x(t) = f(t)e^t$ on yhtälön (*) toinen ratkaisu. Nyt $\dot{x}(t) = \dot{f}(t)e^t + f(t)e^t$ ja $\ddot{x}(t) = \ddot{f}(t)e^t + 2\dot{f}(t)e^t + f(t)e^t$. Sijoitus yhtälöön osoittaa, että se toteutuu, jos ja vain jos

$$\begin{aligned} &\ddot{f}(t)e^t + 2\dot{f}(t)e^t - \frac{t}{t-1}\dot{f}(t)e^t = 0 \iff \ddot{f}(t) + \frac{t-2}{t-1}\dot{f}(t) = 0 \\ \iff &\dot{f}(t) = A_0\exp\left(-\int \frac{t-2}{t-1}\,dt\right) = A_0\exp\left(\int\left(\frac{1}{t-1} - 1\right)dt\right) \\ &= A_0\exp(\ln|t-1| - t) = A_0|t-1|e^{-t} = A(t-1)e^{-t}. \end{aligned}$$

Valitaan $A = 1$, jolloin osittaisintegrointi antaa

$$f(t) = \int (t-1)e^{-t}\,dt = (t-1)(-e^{-t}) + \int e^{-t}\,dt = -(t-1)e^{-t} - e^{-t} = -te^{-t}.$$

Näin saadaan haluttu ratkaisu $x(t) = f(t)e^t = -te^{-t}e^t = -t$.
Vaihtoehtoisesti voidaan käyttää polynomiyritettä kuten $x(t) = t^n$ vakiolla $n \in \mathbb{Z}$ tai $x(t) = at + b$ vakioin $a, b \in \mathbb{R}$.
Yhtälön (*) yleinen ratkaisu kummallakin väleistä $]-\infty, 1[$ ja $]1, \infty[$ on siis $x(t) = C_1e^t + C_2t$ $(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$.

Osoitetaan, että $x(t) = C_1 e^t + C_2 t$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$ $(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$ on alkuperäisen yhtälön yleinen ratkaisu **koko $\mathbb{R}$:ssä**. Selvästi kaikilla C_1, C_2 tämä funktio toteuttaa yhtälön $\mathbb{R}$:ssä. Kääntäen, jos x on ratkaisu $\mathbb{R}$:ssä, niin on olemassa vakiot $C_1', C_2', C_1'', C_2'' \in \mathbb{R}$, joilla $x(t) = C_1' e^t + C_2' t$ on ratkaisu välillä $]-\infty, 1[$ ja tällöin jatkuvuuden vuoksi myös välillä $]-\infty, 1]$ ja $x(t) = C_1'' e^t + C_2'' t$ on ratkaisu välillä $]1, \infty[$ ja silloin myös välillä $[1, \infty[$. Tällöin $C_1' e + C_2' = x(1) = \dot{x}(1) = C_1'' e + C_2''$ ja $C_1' e = \ddot{x}(1) = C_1'' e$. Siis $C_1' = C_1''$ ja $C_2' = C_2''$. Täten pätee $x(t) = C_1 e^t + C_2 t$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$ kertoimin $C_1 = C_1' = C_1''$ ja $C_2 = C_2' = C_2''$.

4. On etsittävä systeemin $\dot{x}(t) = Ax(t)$ perusmatriisi seuraavan kahden eri vakiomatriisin tapauksessa.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Nyt A:n karakteristinen yhtälö on

$$\det(A - rI) = \begin{vmatrix} 2-r & 3 \\ 1 & -r \end{vmatrix} = r^2 - 2r - 3 = (r-3)(r+1) = 0,$$

jonka juuret ovat erisuuret reaaliluvut $r = 3$ ja $r = -1$. Nämä ovat siis A:n ominaisarvot, ja niihin liittyvistä A:n ominaisvektoreista voidaan valita $\mathbb{R}^2$:lle kanta. Etsitään ominaisvektorit $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

$$r = 3\colon \quad A\xi = 3\xi \iff (A - 3I)\xi = 0 \iff \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -\xi_1 + 3\xi_2 & = 0 \\ \xi_1 - 3\xi_2 & = 0 \end{cases} \iff \xi_1 = 3\xi_2$$

$$\iff \xi = a \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{jollain } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Valitaan $a = 1$. Tällöin systeemille saadaan ratkaisu $x_1(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$r = -1\colon \ (A + I)\xi = 0 \iff \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xi = 0 \iff \xi_1 + \xi_2 = 0 \iff \xi = a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Valitaan $a = 1$. Tällöin systeemille saadaan ratkaisu $x_2(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Systeemillä on siis perusmatriisi X, jonka sarakevektorit ovat x_1 ja x_2:

$$X(t) = \operatorname{col}(x_1(t), x_2(t)) = \begin{pmatrix} 3e^{3t} & -e^{-t} \\ e^{3t} & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Nyt A:n karakteristinen yhtälö on

$$\det(A - rI) = \begin{vmatrix} -r & 1 & -1 \\ 0 & -r & 1 \\ 0 & 1 & -r \end{vmatrix} = -r \begin{vmatrix} -r & 1 \\ 1 & -r \end{vmatrix} = -r(r^2 - 1) = 0,$$

jonka juuret ovat kolme erisuurta reaalilukua $r = 0$ ja $r = \pm 1$. Nämä ovat siis A:n ominaisarvot, ja niihin liittyvistä A:n ominaisvektoreista voidaan valita $\mathbb{R}^3$:lle kanta. Etsitään ominaisvektorit $\xi = (\xi_1\ \xi_2\ \xi_3)^T \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ja vastaavat ratkaisut $x(t) = e^{rt}\xi$:

Tapauksessa $r = 0$ on $A\xi = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xi \iff \begin{cases} \xi_2 - \xi_3 & = 0 \\ \xi_3 & = 0 \\ \xi_2 & = 0 \end{cases} \iff \xi_2 = \xi_3 = 0 \iff$

$\xi = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$, ja valitsemalla $a = 1$ saadaan systeemille ratkaisu $x_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Tapauksessa $r = 1$ on $(A - I)\xi = 0 \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xi = 0 \iff \begin{cases} -\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 & = 0 \\ -\xi_2 + \xi_3 & = 0 \\ \xi_2 - \xi_3 & = 0 \end{cases} \iff$ $\xi_2 = \xi_3$ ja $\xi_1 = 0 \iff \xi = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$, ja valitsemalla $a = 1$ saadaan systeemille ratkaisu $x_2(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Tapauksessa $r = -1$ on $(A + I)\xi = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xi = 0 \iff \begin{cases} \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 & = 0 \\ \xi_2 + \xi_3 & = 0 \\ \xi_2 + \xi_3 & = 0 \end{cases} \iff$ $\xi_2 = -\xi_3$ ja $\xi_1 = 2\xi_3 \iff \xi = a \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$, ja valitsemalla $a = 1$ saadaan systeemille ratkaisu $x_3(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Systeemillä on siis perusmatriisi X, jonka sarakevektorit ovat x_1, x_2 ja x_3:

$$X(t) = \operatorname{col}(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2e^{-t} \\ 0 & e^t & -e^{-t} \\ 0 & e^t & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

5. Olkoot $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos t & 1 \end{pmatrix}$ ja $f(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$.

On ensin määritettävä homogeenisen systeemin $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ tilansiirtomatriisi. Siihen tarvitaan systeemin perusmatriisi. Merkitään $x = (u\ v)^T$, jolloin

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \iff \begin{cases} \dot{u}(t) = u(t) \\ \dot{v}(t) = u(t)\cos t + v(t) \end{cases} \iff \begin{cases} u(t) = C_1 e^t \quad (C_1 \in \mathbb{R}) \\ \dot{v}(t) - v(t) = C_1 e^t \cos t. \quad (*) \end{cases}$$

Tässä $(*) \iff (d/dt)(e^{-t}v(t)) = C_1 \cos t \iff e^{-t}v(t) = C_1 \sin t + C_2 \quad (C_2 \in \mathbb{R}) \iff v(t) = C_1 e^t \sin t + C_2 e^t$. Systeemin yleinen ratkaisu on siis

$$x(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^t \\ C_1 e^t \sin t + C_2 e^t \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix},$$

joten systeemillä on perusmatriisi $X(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ e^t \sin t & e^t \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin t & 1 \end{pmatrix}$. Täten systeemillä on tilansiirtomatriisi

$$\Phi(t,s) = X(t)X(s)^{-1} = e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin t & 1 \end{pmatrix} e^{-s} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sin s & 1 \end{pmatrix} = e^{t-s} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin t - \sin s & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{kun } t, s \in \mathbb{R}.$$

Ratkaistaan nyt alkuarvotehtävä

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ratkaisu saadaan (muodosta $x(t) = X(t)c(t)$ vakion varioinnilla johdettavasta) kaavasta

$$x(t) = \Phi(t,0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \Phi(t,s) f(s)\, ds.$$

Tässä

$$\Phi(t,0)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix}1 & 0\\ \sin t & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^t\\ e^t\sin t + e^t\end{pmatrix}$$

ja

$$\begin{aligned}\Phi(t,s)f(s) &= e^{t-s}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \sin t - \sin s & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s\\0\end{pmatrix} = e^{t-s}\begin{pmatrix}s\\ s\sin t - s\sin s\end{pmatrix}\\ &= e^t\sin t\begin{pmatrix}0\\ se^{-s}\end{pmatrix} + e^t\begin{pmatrix}se^{-s}\\ -se^{-s}\sin s\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Täten

$$\int_0^t \Phi(t,s)f(s)\,ds = e^t\sin t\begin{pmatrix}0\\ I(t)\end{pmatrix} + e^t\begin{pmatrix}I(t)\\ J(t)\end{pmatrix},$$

jossa $I(t) = \int_0^t se^{-s}\,ds$ ja $J(t) = -\int_0^t se^{-s}\sin s\,ds$. On laskettava nämä integraalit. Osittaisintegroimalla saadaan

$$I(t) = \Big/_{0}^{t} s(-e^{-s}) + \int_0^t e^{-s}\,ds = \Big/_{0}^{t} -(s+1)e^{-s} = 1-(t+1)e^{-t}.$$

Integraali $J(t)$ voidaan laskea osittaisintegroinnein, mutta on mukavampi käyttää määritettävien kerrointen menetelmää: tutkitaan, onko

$$J(t) = ate^{-t}\cos t + bte^{-t}\sin t + ce^{-t}\cos t + de^{-t}\sin t + \alpha$$

kaikilla $t\in\mathbb{R}$ joillakin $a,b,c,d,\alpha\in\mathbb{R}$. Derivointi antaa vaatimuksen

$$\begin{aligned}&-te^{-t}\sin t = \dot J(t) = ate^{-t}(-\cos t - \sin t) + ae^{-t}\cos t + bte^{-t}(-\sin t + \cos t) + be^{-t}\sin t\\ &+ ce^{-t}(-\cos t - \sin t) + de^{-t}(-\sin t + \cos t)\\ &= (-a+b)te^{-t}\cos t + (-a-b)te^{-t}\sin t + (a-c+d)e^{-t}\cos t + (b-c-d)e^{-t}\sin t,\end{aligned}$$

joten ehdoksi tulee $-a+b=0$, $-a-b=-1$, $a-c+d=0$ ja $b-c-d=0$ eli $a=b=c=\frac12$ ja $d=0$. Lisäksi tulee vaatimus $0=J(0)=c+\alpha \iff \alpha=-\frac12$. Siis

$$J(t) = \tfrac12 te^{-t}(\cos t + \sin t) + \tfrac12 e^{-t}\cos t - \tfrac12.$$

Täten alkuarvotehtävän ratkaisu on

$$\begin{aligned}x(t) &= \begin{pmatrix}e^t\\ e^t\sin t + e^t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ e^t\sin t - t\sin t - \sin t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}e^t - t - 1\\ \frac12 t\cos t + \frac12 t\sin t + \frac12\cos t - \frac12 e^t\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}2e^t - t - 1\\ 2e^t\sin t + \frac12 e^t + \frac12 t\cos t - \frac12 t\sin t + \frac12\cos t - \sin t\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Huom. 1) Yhtälön $\dot x(t) = A(t)x(t)$ perusjärjestelmä saadaan vaihtoehtoisesti seuraavasti. Kun $t\in\mathbb{R}$, niin $A(t)$ on **alakolmiomatriisi** lävistäjän kertoimin 1 ja 1, joten $A(t)$:llä on ominaisarvo 1 ja siihen kuuluva t:stä riippumaton ominaisvektori $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, onhan $\begin{pmatrix}1 & 0\\ \cos t & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Tällöin $x_1(t) = e^t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ e^t\end{pmatrix}$ on yksi, yritteen $x(t) = e^{\lambda t}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ ($\lambda,u,v\in\mathbb{R}$, $u^2+v^2>0$) tuottama ratkaisu, joka saatiin ylläkin. Toinen, tästä lineaarisesti riippumaton ratkaisu saadaan vakion varioinnilla: Vaaditaan, että $x_2(t) = e^t\begin{pmatrix}u(t)\\v(t)\end{pmatrix}$ on ratkaisu ja että $\begin{pmatrix}u(t)\\v(t)\end{pmatrix}$ ei ole vakiofunktio. Nyt

$$\dot x_2(t) = A(t)x_2(t) \iff e^t\begin{pmatrix}\dot u(t)\\ \dot v(t)\end{pmatrix} + e^t\begin{pmatrix}u(t)\\v(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ \cos t & 1\end{pmatrix}e^t\begin{pmatrix}u(t)\\v(t)\end{pmatrix} \iff \begin{cases}\dot u(t) = 0\\ \dot v(t) = u(t)\cos t\end{cases}.$$

Voidaan valita $u(t) = 1$ ja $v(t) = \sin t$, jolloin saadaan $x_2(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \sin t \end{pmatrix}$ kuten yllä, mutta differentiaaliyhtälösysteemi (u, v):lle oli aiempaa helpompi.

2) Nimitys **tilansiirtomatriisi** selittyy seuraavasti. Yhtälö $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ kuvaa lineaarista systeemiä, jossa ratkaisufunktion x arvo $x(t)$ kuvaa systeemin tilaa hetkellä t. Olkoon $X(t)$ yhtälön perusmatriisi ja $\Phi(t, s) = X(t)X(s)^{-1}$ tilansiirtomatriisi. Osoitetaan, että

$$x(t) = \Phi(t, s)x(s)$$

eli että **tilasta hetkellä** s **päästään tilaan hetkellä** t **kertomalla tilansiirtomatriisilla** $\Phi(t, s)$. Tämä seuraa siitä, että $x(t) = \Phi(t, 0)x(0) = X(t)X(0)^{-1}x(0)$ ja $x(s) = \Phi(s, 0)x(0) = X(s)X(0)^{-1}x(0)$, jolloin $x(0) = X(0)X(s)^{-1}x(s)$ ja siis

$$x(t) = X(t)X(0)^{-1}X(0)X(s)^{-1}x(s) = X(t)X(s)^{-1}x(s) = \Phi(t, s)x(s).$$

Alkuarvo-ongelman

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ratkaisukaava

$$x(t) = \Phi(t, 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \Phi(t, s)f(s)\, ds$$

osoittaa tavan, jolla systeemin tila $x(t)$ riippuu alkutilasta $x(0)$ ja ”ulkoisesta voimasta” f.