Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Harjoitus 5 (7.-11.12.2009)
Ratkaisuehdotuksia (Jr)

1. a) Ominaisarvot ovat A:n karakteristisen polynomin juuret:

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 3/2-\lambda & -1/2 \\ -1/2 & 3/2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \text{ joss } \lambda_1 = 1 \text{ tai } \lambda_2 = 2.\end{aligned}$$

b) Ominaisarvoa $\lambda_1 = 1$ vastaavat ominaisvektorit ovat yhtälön $(A-\lambda_1 I)\vec{x} = (A-I)\vec{x} = \vec{0}$ epätriviaalit ratkaisut:

$$\left[A - I \mid \vec{0}\right] = \left[\begin{array}{rr|r} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

josta saadaan ominaisvektorit

$$\vec{x} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, s \neq 0.$$

Vastaavasti ominaisarvoa $\lambda_2 = 2$ vastaavat ominaisvektorit ovat yhtälön $(A-2I)\vec{x} = \vec{0}$ epätriviaalit ratkaisut:

$$\left[A - 2I \mid \vec{0}\right] = \left[\begin{array}{rr|r} -1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

josta saadaan ominaisvektorit

$$\vec{x} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, s \neq 0.$$

c) Koska ominaisvektorit $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ja $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ovat lineaarisesti riippumattomat, A on diagonalisoituva ja

$$\begin{aligned}A = PDP^{-1} = &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

2. a) Koska A on yläkolmiomatriisi, sen ominaisarvot ovat lävistäjäalkiot $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

Ominaisarvoa $\lambda_1 = 1$ vastaavat ominaisvektorit ovat yhtälön $(A - \lambda_1 I)\vec{x} = (A - I)\vec{x} = \vec{0}$ epätriviaalit ratkaisut:

$$\left[A - I \,\middle|\, \vec{0}\right] = \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

josta saadaan ominaisvektorit

$$\vec{x} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ missä } s \neq 0.$$

Vastaavasti ominaisarvoa $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ vastaavat ominaisvektorit ovat yhtälön $(A + I)\vec{x} = \vec{0}$ epätriviaalit ratkaisut:

$$\left[A + I \,\middle|\, \vec{0}\right] = \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

josta saadaan ominaisvektorit

$$\vec{x} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ missä } s \neq 0 \text{ tai } t \neq 0.$$

b) Koska kullakin A:n ominaisarvolla on sama algebrallinen ja geometrinen kertaluku, A on diagonalisoituva ja sillä on hajotelma

$$\begin{aligned} A = PDP^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

c) Kohdan b) avulla saadaan

$$A^{2008} = PD^{2008}P^{-1} = P \begin{bmatrix} 1^{2008} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{2008} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{2008} \end{bmatrix} P^{-1} = PI_3P^{-1} = I_3.$$

Tehtävät M1-M4 on tehty Scilabilla, minkä takia käytetyt komennot eivät ehkä toimi Matlabissa.

M1.

```
-->A=[1 2 3 4]';

-->size(A)
 ans  =

    4.    1.

-->B=zeros(1,4);

-->size(B)
 ans  =

    1.    4.

-->C=[2*ones(3,3);ones(1,3)];

-->size(C)
 ans  =

    4.    3.

-->D=[7,0,1,0;0,1,-1,4;0,0,0,0];

-->size(D)
 ans  =
```

```
    3.    4.

-->E=eye(3,3);

-->size(E)
 ans  =

    3.    3.

-->F=[2 1 3 5;0 0 1 -1;0 0 0 3;0 0 0 0];

-->size(F)
 ans  =

    4.    4.
```

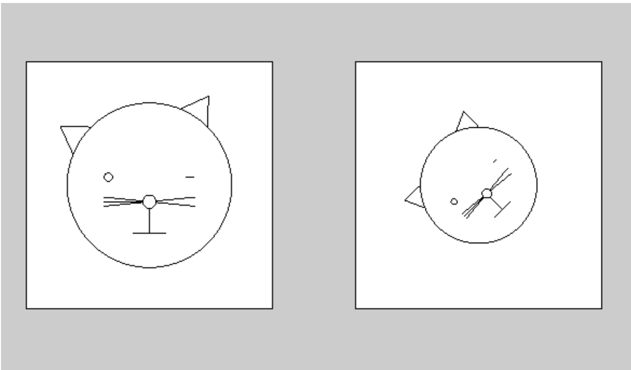
M2.

```
-->A=[1 2;-1 -1]
 A  =

    1.    2.
  - 1.  - 1.

-->b=[1 -2]'
 b  =

    1.
  - 2.

-->x=inv(A)*b
 x  =

    3.
  - 1.

-->A*x-b
```

```
 ans  =

    0.
    0.
```

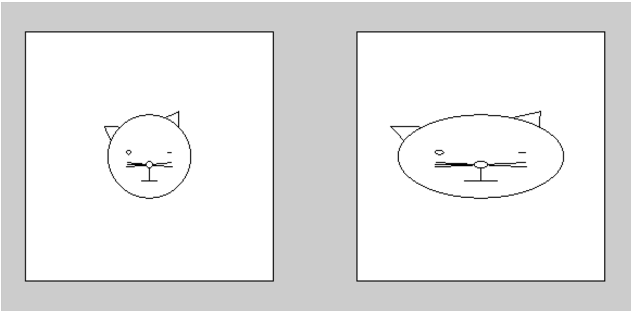
M3.

```
-->A=[3/2 -1/2;-1/2 3/2];

-->P=[1 1;-1 1];

-->D=diag([2,1]);

-->A-P*D*inv(P)
 ans  =

    0.    0.
    0.    0.

-->kissa(inv(P))
```



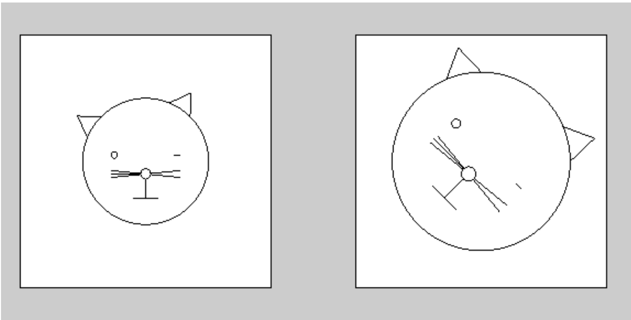
Jos P^{-1} tulkitaan kannanvaihtomatriisiksi standardikannasta E kantaan B, niin P on kannanvaihtomatriisi kannasta B standardikantaan E. Tällöin P:n sarakkeet ovat B:n kantavektorit ja P^{-1}:n sarakkeet ovat standardikantavektoreiden $\vec{e}_1$ ja $\vec{e}_2$ koordinaatit kannassa B. Ohjelma `kissa` kuitenkin piirtää nämä koordinaattivektorit standardikannan vektoreina, joten yo. kuvan vasemmanpuoleinen kissa ei kuvaudukaan itselleen, vaan oikeanpuoleiseksi kissaksi: kierto 45 astetta vastapäivään ja pienennys kertoimella $1/\sqrt{2}$.

```
-->kissa(D)
```



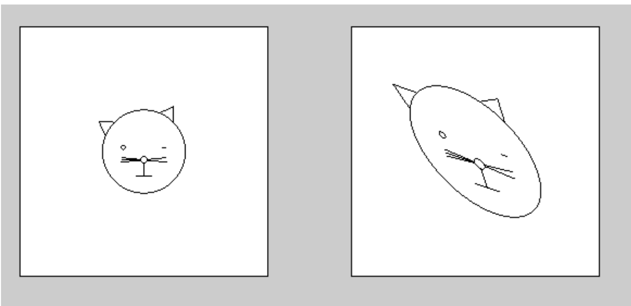
Matriisi D venyttää x-koordinaatit kertoimella 2.

```
-->kissa(P)
```



Matriisi P tekee päinvastaisen kuin P^{-1} yllä: kierto 45 astetta myötäpäivään ja suurennus kertoimella $\sqrt{2}$.

```
-->kissa(A)
```



Matriisi A tekee kissalle yllä mainitut operaatiot peräjälkeen.

M4. a)

```
-->A=[5 -4 0 0 0;0 1 0 0 0;0 0 1 0 0;0 0 0 1 0;-4 4 0 0 1];
```

Alkuarvaus:

```
-->x=[0.3 -0.77 0.98 0.2 0]';
```

Lasketaan x:n itseisarvoltaan suurin alkio. Laitetaan jonon (m_k) alkiot vektorin m komponenteiksi. Aloitetaan indeksointi luvusta 1.

```
-->m(1)=max(abs(x));
```

Laitetaan jonon (y_k) vektorit matriisin y sarakkeiksi. Indeksointi alkaa luvusta 1.

```
-->y(:,1)=x;
```

Tehdään potenssimenetelmän iterointi:

```
-->for k=2:20, x=A*y(:,k-1); m(k)=max(abs(x)); y(:,k)=(1/m(k))*x; end
```

Tulostetaan y transponoituna lukemisen helpottamiseksi.

```
-->y'
 ans  =

    0.3  - 0.77         0.98         0.2          0.
    1.   - 0.1681223    0.2139738    0.0436681  - 0.9344978
    1.   - 0.0296382    0.0377213    0.0076982  - 0.9884527
    1.   - 0.0057903    0.0073695    0.0015040  - 0.9977440
    1.   - 0.0011527    0.0014671    0.0002994  - 0.9995509
    1.   - 0.0002303    0.0002932    0.0000598  - 0.9999103
    1.   - 0.0000461    0.0000586    0.0000120  - 0.9999821
    1.   - 0.0000092    0.0000117    0.0000024  - 0.9999964
    1.   - 0.0000018    0.0000023    0.0000005  - 0.9999993
    1.   - 0.0000004    0.0000005    9.570D-08  - 0.9999999
    1.   - 7.369D-08    9.379D-08    1.914D-08  - 1.0000000
```

```
    1.   - 1.474D-08    1.876D-08    3.828D-09  - 1.0000000
    1.   - 2.948D-09    3.751D-09    7.656D-10  - 1.
    1.   - 5.895D-10    7.503D-10    1.531D-10  - 1.
    1.   - 1.179D-10    1.501D-10    3.062D-11  - 1.
    1.   - 2.358D-11    3.001D-11    6.125D-12  - 1.
    1.   - 4.716D-12    6.002D-12    1.225D-12  - 1.
    1.   - 9.432D-13    1.200D-12    2.450D-13  - 1.
    1.   - 1.886D-13    2.401D-13    4.900D-14  - 1.
    1.   - 3.773D-14    4.802D-14    9.800D-15  - 1.

-->m
 m  =

    0.98
    4.58
    5.6724891
    5.1185527
    5.0231614
    5.0046109
    5.0009213
    5.0001842
    5.0000368
    5.0000074
    5.0000015
    5.0000003
    5.0000001
    5.
    5.
    5.
    5.
    5.
    5.
    5.
```

b)

```
-->[D,V]=bdiag(A)
 V  =
```

```
   0.     1.     1.     0.     0.
   0.     0.     1.     0.     0.
   0.     0.     0.     1.     0.
   0.     0.     0.     0.     1.
   1.   - 1.   - 1.     0.     0.
 D  =

   1.     0.     0.     0.     0.
   0.     5.     0.     0.     0.
   0.     0.     1.     0.     0.
   0.     0.     0.     1.     0.
   0.     0.     0.     0.     1.
```

c) En.

Olkoon

$$\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ominaisarvoa 5 vastaavan ominaisavaruuden kantavektori, ja olkoot

$$\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{b}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{b}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ominaisarvoa 1 vastaavan ominaisavaruuden kantavektorit. Koska ominaisvektorit $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4, \vec{b}_5$ virittävät avaruuden $\mathbb{R}^5$, voidaan jokainen nollasta eroava vektori $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^5$, jonka alkioiden itseisarvot ovat korkeintaan 1, esittää lineaarikombinaationa

$$\vec{x}_0 = c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + c_3\vec{b}_3 + c_4\vec{b}_4 + c_5\vec{b}_5.$$

Jos tässä $c_1 \neq 0$, niin potenssimenetelmässä (m_k) suppenee kohti dominoivaa ominaisarvoa 5 ja (y_k) suppenee kohti vastaavaa dominoivaa ominaisvektoria, ks. lause 4.28 ja sen jälkeiset huomautukset Poolen kirjasta. Jos taas $c_1 = 0$, niin (m_k) suppenee kohti ominaisarvoa 1 ja (y_k) suppenee kohti vastaavaa ominaisvektoria, koska tällöin kaikilla $k \geq 2$ pätee

$$m_k = 1 \text{ ja } y_k = \frac{1}{m_1} \cdot x_0.$$

Laskettaessa tietokoneella tilanne ei ole aivan näin yksinkertainen liukulukulaskennan pyöristysvirheiden takia. Tässä esimerkki, jossa alkuarvaus on ominaisarvoa 1 vastaava ominaisvektori:

```
-->x=[0.99 0.99 0 0 -0.99]';

-->m(1)=max(abs(x));

-->y(:,1) = x;

-->for k=2:20, x=A*y(:,k-1); m(k)=max(abs(x)); y(:,k)=(1/m(k))*x; end

-->y'
 ans  =

    0.99    0.99         0.    0.  - 0.99
    1.      1.           0.    0.  - 1.
    1.      1.           0.    0.  - 1.
    1.      1.           0.    0.  - 1.
    1.      1.           0.    0.  - 1.
    1.      1.           0.    0.  - 1.
    1.      1.           0.    0.  - 1.
    1.      1.           0.    0.  - 1.
    1.      1.           0.    0.  - 1.
    1.      1.           0.    0.  - 1.
    1.      1.           0.    0.  - 1.
    1.      1.           0.    0.  - 1.
    1.      1.0000000    0.    0.  - 1.
    1.      1.0000000    0.    0.  - 1.
    1.      0.9999999    0.    0.  - 1.
    1.      0.9999993    0.    0.  - 1.
    1.      0.9999966    0.    0.  - 1.
```

```
    1.     0.9999831    0.    0.  - 1.
    1.     0.9999153    0.    0.  - 1.
    1.     0.9995767    0.    0.  - 1.
    1.     0.9978869    0.    0.  - 1.
    1.     0.9895230    0.    0.  - 1.
    1.     0.9497221    0.    0.  - 1.
    1.     0.7907027    0.    0.  - 1.
    1.     0.4303872    0.    0.  - 1.
    1.     0.1312776    0.    0.  - 1.
    1.     0.0293365    0.    0.  - 1.
    1.     0.0060083    0.    0.  - 1.
    1.     0.0012075    0.    0.  - 1.
    1.     0.0002417    0.    0.  - 1.

-->m
 m  =

    0.99
    0.99
    1.
    1.
    1.
    1.
    1.
    1.
    1.
    1.
    1.
    1.
    1.
    1.
    1.0000001
    1.0000005
    1.0000027
    1.0000136
    1.0000678
    1.0003388
    1.0016933
```

```
1.0084524
1.0419079
1.2011115
1.8371891
3.2784511
4.4748895
4.882654
4.9759668
4.9951701
```