Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Syksy 2009
Laskuharjoitus 1 (9. - 13.11.2009)
Ratkaisuehdotuksia
Vesa Ala-Mattila

Tehtävä 1. Olkoon V vektoriavaruus. Todistettava: jos $U \subset V$ ja $W \subset V$ ovat V:n aliavaruuksia, niin myös leikkaus $U \cap W$ on V:n aliavaruus.

Ratkaisu. Olkoon $X \subset V$ mielivaltainen. Määritelmän mukaan X on V:n aliavaruus, jos ja vain jos X toteuttaa ehdot i) V:n nollavektori 0_V kuuluu joukkoon X, ii) $x + y \in X$ kaikilla $x, y \in X$, iii) $tx \in X$ kaikilla $x \in X$ ja $t \in \mathbb{R}$.

Toisaalta määritelmän mukaan $x \in U \cap W$, jos ja vain jos $x \in U$ ja $x \in W$, missä $x \in V$ on mielivaltainen.

Oletuksen mukaan $0_V \in U$ ja $0_V \in W$. Siispä $0_V \in U \cap W$. Täten $U \cap W$ toteuttaa ehdon i).

Olkoot $x, y \in U \cap W$ mielivaltaisia. Nyt $x, y \in U$ ja $x, y \in W$, ja koska U ja W toteuttavat ehdon ii), seuraa $x+y \in U$ ja $x+y \in W$. Täten $x+y \in U \cap W$, joten $U \cap W$ toteuttaa ehdon ii).

Olkoot $x \in U \cap W$ ja $t \in \mathbb{R}$ mielivaltaisia. Nyt $x \in U$ ja $x \in W$. Oletuksen mukaan U ja W toteuttavat ehdon iii), mistä seuraa, että $tx \in U$ ja $tx \in W$. Näin ollen $tx \in U \cap W$, joten $U \cap W$ toteuttaa ehdon iii).

Koska $U \cap W$ toteuttaa ehdot i), ii) ja iii), on $U \cap W$ vektoriavaruuden V aliavaruus.

Tehtävä 2. Muodosta sellaiset $\mathbb{R}^2$:n aliavaruudet U ja W, että unioni $U \cup W$ ei ole $\mathbb{R}^2$:n aliavaruus.

Ratkaisu. Olkoon U x-akseli ja W y-akseli, ts. asetetaan

$$U = \{(s, 0) \in \mathbb{R}^2 : s \in \mathbb{R}\} \qquad \text{ja} \qquad W = \{(0, s) \in \mathbb{R}^2 : s \in \mathbb{R}\}.$$

On triviaalia, että $(0, 0) \in U$ ja $(0, 0) \in W$. Toisaalta kaikilla $t, s, u \in \mathbb{R}$ on voimassa

$$(s,0)+(u,0)=(s+u,0) \qquad \text{ja} \qquad (0,s)+(0,u)=(0,s+u)$$

ja edelleen

$$t(s,0)=(ts,0) \qquad \text{ja} \qquad t(0,s)=(0,ts).$$

On selvää, että aliavaruuden määritelmän nojalla U ja W ovat $\mathbb{R}^2$:n aliavaruuksia.

Pätee $(1,0) \in U$ ja $(0,1) \in W$, joten $(1,0),(0,1) \in U \cup W$. Selvästi kuitenkin $(1,0)+(0,1)=(1,1) \notin U \cup W$, ja aliavaruuden määritelmästä seuraa, että $U \cup W$ ei ole $\mathbb{R}^2$:n aliavaruus.

Tehtävä 3. Olkoon

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Muodosta kanta avaruuksille $\mathrm{row}(A)$, $\mathrm{col}(A)$ ja $\mathrm{null}(A)$.

Ratkaisu. Annetun teorian mukaan sopivat kannat voidaan muodostaa matriisia A vastaavan redusoidun porrasmatriisin ja yhtälön $Ax=\overline{0}, x \in \mathbb{R}^5$, yleisen ratkaisun avulla. Suoritetaan siis redusointi:

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \overset{(1)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \overset{(2)}{\longrightarrow}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & -7 \end{bmatrix} \overset{(3)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{(4)}{\longrightarrow}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{(5)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) Vaihdetaan ensimmäinen ja kolmas rivi.
(2) Lisätään toiseen riviin ensimmäinen rivi. Lisätään kolmanteen riviin ensimmäinen rivi kerrottuna luvulla -2.
(3) Lisätään kolmanteen riviin toinen rivi.
(4) Jaetaan toinen rivi luvulla 2.
(5) Vähennetään ensimmäisestä rivistä toinen rivi.

Ylläolevasta voidaan lukea, että yhtälön $Ax = \overline{0}, x \in \mathbb{R}^5$, yleinen ratkaisu on

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 - x_4 - (1/2)x_5 \\ x_2 \\ -3x_4 - (7/2)x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}.$$

Kirjoitetaan $x_2 = t_1$, $x_4 = t_2$ ja $x_5 = t_3$. Nyt yleinen ratkaisu voidaan kirjoittaa muodossa

$$x = t_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} -(1/2) \\ 0 \\ -(7/2) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Käytetään sitten annettua teoriaa sopivien kantojen muodostamiseen.

Riviavaruuden row(A) eräs kanta on matriisia A vastaavan redusoidun porrasmatriisin nollarivistä eroavien rivien muodostama jono. Täten $(\overline{r}_1, \overline{r}_2)$ on eräs row(A):n kanta, missä

$$\overline{r}_1 = [\ 1\ \ -2\ 0\ 1\ 1/2\ ] \qquad \text{ja} \qquad \overline{r}_2 = [\ 0\ 0\ 1\ 3\ 7/2\ ].$$

Sarakeavaruuden col(A) eräs kanta on niiden A:n sarakkeiden muodostama jono, joita vastaavissa sarakkeissa matriisia A vastaavassa redusoidussa porrasmatriisissa on johtava alkio. Redusoidussa porrasmatriisissa yllä ensimmäisessä ja kolmannessa sarakkeessa on johtava alkio, joten $(\overline{c}_1, \overline{c}_2)$ on eräs col(A):n kanta, missä

$$\overline{c}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{ja} \qquad \overline{c}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nolla-avaruuden null(A) eräs kanta on yhtälön $Ax = \overline{0}, x \in \mathbb{R}^5$, yleisessä ratkaisussa (1) esiintyvien vektoreiden muodostama jono. Täten $(\overline{n}_1, \overline{n}_2, \overline{n}_3)$ on eräs null(A):n kanta, missä

$$\overline{n}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{n}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \overline{n}_3 = \begin{bmatrix} -(1/2) \\ 0 \\ -(7/2) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tehtävä 4. Olkoon
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$
Muodosta kanta avaruuksille $\mathrm{row}(A)$, $\mathrm{col}(A)$ ja $\mathrm{null}(A)$.

Ratkaisu. Annetun teorian mukaan sopivat kannat voidaan muodostaa matriisia A vastaavan redusoidun porrasmatriisin ja yhtälön $Ax = \overline{0}, x \in \mathbb{R}^4$, yleisen ratkaisun avulla. Suoritetaan siis redusointi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \overset{(1)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \overset{(2)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{(3)}{\longrightarrow}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{(4)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) Vähennetään kolmannesta rivistä toinen rivi.
(2) Jaetaan kolmas rivi luvulla -2.
(3) Vähennetään toisesta rivistä kolmas rivi. Vähennetään ensimmäisestä rivistä kolmas rivi.
(4) Vähennetään ensimmäisestä rivistä toinen rivi.

Ylläolevasta voidaan lukea, että yhtälön $Ax = \overline{0}, x \in \mathbb{R}^4$, yleinen ratkaisu on
$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
Kirjoitetaan $x_3 = t$. Nyt yleinen ratkaisu voidaan kirjoittaa muodossa
$$x = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$
Käytetään sitten annettua teoriaa sopivien kantojen muodostamiseen.

Riviavaruuden row(A) eräs kanta on matriisia A vastaavan redusoidun porrasmatriisin nollarivistä eroavien rivien muodostama jono. Täten $(\overline{r}_1, \overline{r}_2, \overline{r}_3)$ on eräs row(A):n kanta, missä

$$\overline{r}_1 = [\,1\;0\;1\;0\,] \quad , \quad \overline{r}_2 = [\,0\;1\;-1\;0\,] \quad \text{ja} \quad \overline{r}_3 = [\,0\;0\;0\;1\,] .$$

Sarakeavaruuden col(A) eräs kanta on niiden A:n sarakkeiden muodostama jono, joita vastaavissa sarakkeissa matriisia A vastaavassa redusoidussa porrasmatriisissa on johtava alkio. Redusoidussa porrasmatriisissa yllä ensimmäisessä, toisessa ja neljännessä sarakkeessa on johtava alkio, joten jono $(\overline{c}_1, \overline{c}_2, \overline{c}_3)$ on eräs col(A):n kanta, missä

$$\overline{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \overline{c}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \overline{c}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} .$$

Nolla-avaruuden null(A) eräs kanta on yhtälön $Ax = \overline{0}, x \in \mathbb{R}^4$, yleisessä ratkaisussa (2) esiintyvän vektorin muodostama jono. Täten $(\overline{n})$ on eräs null(A):n kanta, missä

$$\overline{n} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Tehtävä 5. Olkoon A matriisi kokoa 4×2.
(a) Selitä, miksi A:n rivit ovat välttämättä lineaarisesti riippuvat.
(b) Mitkä ovat A:n nulliteetin mahdolliset arvot?

Ratkaisu. Merkitään $A = [\overline{a}_1, \overline{a}_2]$, $\overline{a}_1, \overline{a}_2 \in \mathbb{R}^4$. Koska $\text{col}(A) = \text{span}(\overline{a}_1, \overline{a}_2)$, on col($A$):n dimensio 0, 1 tai 2. Esimerkeistä

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nähdään, että jokainen näistä arvoista esiintyy. Annetun teorian mukaan avaruuksilla row(A) ja col(A) on sama dimensio. Täten row(A):n dimensio on 0, 1 tai 2, ja jokainen näistä arvoista esiintyy jossain tapauksessa.

Tiedetään, että jos vektoriavaruuden V dimensio on n ja $(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_p)$ on V:n sisältämien vektoreiden jono, jossa $p > n$, niin jono $(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_p)$ on sidottu.

Kohtaan (a) voidaan nyt antaa seuraava selitys. Kirjoitetaan

$$A = \begin{bmatrix} \overline{a}^1 \\ \overline{a}^2 \\ \overline{a}^3 \\ \overline{a}^4 \end{bmatrix},$$

jossa $\overline{a}^1, \overline{a}^2, \overline{a}^3, \overline{a}^4 \in \mathbb{R}^{1\times 2}$. A:n rivit ovat välttämättä lineaarisesti riippuvat, ts. jono $(\overline{a}^1, \overline{a}^2, \overline{a}^3, \overline{a}^4)$ on välttämättä sidottu, koska tässä jonossa on neljä jäsentä ja row(A):n dimensio on korkeintaan 2.

Matriisin A nulliteetilla tarkoitetaan nolla-avaruuden null(A) dimensiota. Matriisin A niin sanottu aste on sama kuin row(A):n dimensio. Merkitään astetta symbolilla r ja null(A):n dimensiota symbolilla d. Annetun teoreeman mukaan on voimassa

$$r + d = 2,$$

jossa siis 2 on A:n sarakkeiden lukumäärä. Täten kysymykseen (b) voidaan vastata, että koska $r = 0, 1$ tai 2 ja r tosiasiallisesti saa kaikki nämä arvot, niin $d = 2 - r = 0, 1$ tai 2 ja d tosiasiallisesti saa kaikki nämä arvot.

Tehtävä 6. Muodostavatko vektorit

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

avaruuden $\mathbb{R}^4$ kannan? Perustele.

Ratkaisu. Merkitään

$$\overline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \overline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \overline{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \overline{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ja

$$\overline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \overline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \overline{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \overline{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Merkitään lisäksi

$$\overline{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}(\overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \overline{v}_3 + \overline{v}_4).$$

Nyt

$$\begin{aligned}
\overline{e}_1 &= \overline{w} - \overline{v}_4 = \frac{1}{3}(\overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \overline{v}_3) - \frac{2}{3}\overline{v}_4, \\
\overline{e}_2 &= \overline{w} - \overline{v}_3 = \frac{1}{3}(\overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \overline{v}_4) - \frac{2}{3}\overline{v}_3, \\
\overline{e}_3 &= \overline{w} - \overline{v}_2 = \frac{1}{3}(\overline{v}_1 + \overline{v}_3 + \overline{v}_4) - \frac{2}{3}\overline{v}_2, \\
\overline{e}_4 &= \overline{w} - \overline{v}_1 = \frac{1}{3}(\overline{v}_2 + \overline{v}_3 + \overline{v}_4) - \frac{2}{3}\overline{v}_1.
\end{aligned}$$

Näin ollen $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3, \overline{e}_4 \in \operatorname{span}(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4)$. Tämän seurauksena, koska tunnetusti $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3, \overline{e}_4)$ on $\mathbb{R}^4$:n standardikanta, pätee

$$\mathbb{R}^4 = \operatorname{span}(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3, \overline{e}_4) = \operatorname{span}(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4).$$

Tiedetään, että jos vektoriavaruuden V dimensio on n, silloin jokainen V:n virittävä jono $(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n)$ on V:n kanta. Siispä $(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4)$ on $\mathbb{R}^4$:n kanta.

Toinen ratkaisu. Symbolit $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4$ merkitsevät edelleen annettuja vektoreita. Otetaan käyttöön matriisi $A = [\,\overline{v}_1\,\overline{v}_2\,\overline{v}_3\,\overline{v}_4\,]$. Nyt

$$\operatorname{col}(A) = \operatorname{span}(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4) \subset \mathbb{R}^4.$$

Määritetään $\operatorname{col}(A)$:n dimensio etsimällä sille jokin kanta. Tiedetään, että eräs kanta voidaan määrittää matriisia A vastaavan porrasmatriisin avulla, joten muunnetaan A porrasmuotoon:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(5)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) Vähennetään toisesta rivistä ensimmäinen rivi. Vähennetään kolmannesta rivistä ensimmäinen rivi.
(2) Vaihdetaan toinen ja neljäs rivi.
(3) Lisätään kolmanteen riviin toinen rivi.
(4) Lisätään neljänteen riviin kolmas rivi.
(5) Jaetaan neljäs rivi luvulla 3.

Annetun teoreeman mukaan $\mathrm{col}(A)$:n eräs kanta on niiden A:n sarakkeiden muodostama jono, joita vastaavissa sarakkeissa matriisia A vastaavassa porrasmatriisissa on johtava alkio. Täten $(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4)$ on $\mathrm{col}(A)$:n eräs kanta. Koska $\mathrm{col}(A) \subset \mathbb{R}^4$ ja tunnetusti $\mathbb{R}^4$:n dimensio on 4, on itse asiassa niin, että $\mathbb{R}^4 = \mathrm{col}(A)$. Täten $(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4)$ on $\mathbb{R}^4$:n kanta.