Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II, syksy 2009 Laskuharjoitus 3 (23.-27.11.2009)
Samuli Siltanen

1. Osoita, että seuraavat kuvaukset ovat lineaarikuvauksia ja laske niiden matriisiesitys standardikannassa:

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}, \qquad S\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x+2y \\ 3x-4y \end{bmatrix}.$$

   Määrää myös lineaarikuvauksen $S \circ T$ standardimatriisi.

2. Osoita vastaesimerkein, että seuraavat kuvaukset eivät ole lineaarisia:

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x^2 \end{bmatrix}, \qquad S\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 \\ y-1 \end{bmatrix}.$$

3. Määrää seuraavan yhdistetyn lineaarikuvauksen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ standardimatriisi: ensin kierto vastapäivään kulman $\pi/4$ verran, sitten projektio y-akselille ja lopuksi uudestaan kierto vastapäivään kulman $\pi/4$ verran.

4. Näytä, että $\vec{v}$ on matriisin A ominaisvektori ja määrää vastaava ominaisarvo.

$$\text{(a) } A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}; \qquad \text{(b) } A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5. Näytä, että λ on matriisin A ominaisarvo ja etsi jokin λ:n liittyvä ominaisvektori.

$$\text{(a) } A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 3; \qquad \text{(b) } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda = -1.$$

6. Laske seuraavat determinantit.

$$\text{(a) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \qquad \text{(b) } \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & \tan\theta \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}.$$