

**Differentiaaliyhtälöt I**  
Harjoitus 4, syksy 2009

Huom. Tehtävä 5 lasketaan kahden arvoiseksi laskuharjoituspisteitä laskettaessa.

1. Ratkaise yhtälö

$$y' = (x + y + 2)^2.$$

2 Ratkaise yhtälö

$$x^2 - xyy' + y^2 = 0.$$

3. Ratkaise yhtälö

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x + y + 4}{x + 3y + 2}.$$

4. Osoita, että funktiopari  $(y_1, y_2) = (\sqrt{x}, 1/\sqrt{x})$  on yhtälön (Eulerin yhtälön tyyppiä)

$$4x^2y''(x) + 4xy'(x) - y(x) = 0$$

perusjärjestelmä välillä  $]0, \infty[$ . Kirjoita myös yhtälön yleinen ratkaisu välillä  $]0, \infty[$ .

5. Tarkastellaan tartuntatautien SIR-mallia

$$\frac{ds}{dt}(t) = -\alpha R_0 s(t)i(t), \quad \frac{di}{dt}(t) = \alpha R_0 s(t)i(t) - \alpha i(t), \quad \frac{dr}{dt}(t) = \alpha i(t).$$

Oletetaan, että  $i(0) > 0$  ja  $s(0) > 0$ , ja oletetaan tunnetuksi, että silloin  $s(t)$  on vähenevä funktio,  $s_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t)$  on olemassa,  $s_\infty > 0$  ja  $i(s_\infty) = 0$ . Tarkastellaan suuretta  $s_\infty$   $R_0$ :n funktiona  $s_\infty(R_0)$ , kun  $s(0)$  ja  $i(0)$  pidetään vakioina. Osoita, että

$$\lim_{R_0 \rightarrow \infty} s_\infty(R_0) = 0.$$

Ohje. Tarkastele funktiota  $i(s) = C - s + (1/R_0) \ln s$ .