Differentiaaliyhtälöt I
Harjoitus 3, syksy 2009

1. Merivesialtaan mitat ovat 16m $\times$ 10m $\times$ 3m. Aluksi se on täynnä 3-prosenttista suolavettä.

(a) Altaaseen lasketaan raikasta, suolatonta vettä nopeudella $1.2\, m^3/min$ ja samalla nopeudella pois täysin sekoittunutta vettä. Milloin altaan vesi on suolapitoisuudeltaan 1-prosenttista?

(b) Sama tehtävä, mutta altaaseen laskettavan veden suolapitoisuus on 0.5 prosenttia.

2. (a) Ratkaise AAT

$$y' = ay - by^3, \quad y(0) = -c,$$

missä $a, b, c > 0$. Määrää lisäksi ratkaisun raja-arvo $\lim_{x\to\infty} y(x)$.

(b) Ratkaise AAT

$$\dot{x} + 4tx = 2t\sqrt{x}, \quad x(0) = 1.$$

3. Olkoon $D \subset \mathbf{R}^2$ alue ja $F \in C^2(D)$ (2. jatkuvasti deriv. D:ssä). Yhtälö

$$F(x, y) = c, \quad c \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

määrittelee implisiittisesti D:ssä kulkevien F:n tasa-arvokäyrien parven. Derivoimalla puolittain saadaan eksakti differentiaaliyhtälö

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)\, dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\, dy = 0, \tag{2}$$

jossa differentiaalit dx ja dy viittaavat siihen, että tarkastellaan yhtä hyvin funktiota kuin sen käänteisfunktiota (tässäkin käytännöllistä). Jakamalla saadaan $y'(x) = dy/dx$ ja $x'(y) = dx/dy$.
Olkoon $(x, y) \in D$ ja kulkekoon parven (1) käyrä $\mathcal{C}_1$ (on $y(x)$ tai $x(y)$) sen kautta. $\mathcal{C}_1$ siis toteuttaa differentiaaliyhtälön (2). Siten käyrän $\mathcal{C}_1$ normaali pisteessä (x, y) on tasovektori $\big((\partial F/\partial x)(x, y)\,, (\partial F/\partial y)(x, y)\big)$ (pistetulo tangentin kanssa nolla). Kulkekoon (säännöllinen) käyrä $\mathcal{C}_2$ pisteen (x, y) kautta ja leikatkoon se siinä $\mathcal{C}_1$:n kohtisuorasti. Silloin $\mathcal{C}_2$:n normaali pisteessä (x, y) on $\big((\partial F/\partial y)(x, y)\,, -(\partial F/\partial x)(x, y)\big)$. Siten $\mathcal{C}_2$ toteuttaa kyseisessä pisteessä differentiaaliyhtälön

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\, dx - \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)\, dy = 0. \tag{3}$$

Kohtisuora leikkaaja toteuttaa yhtälön (3) - parven (1) kohtisuorien leikkaajien yhtälön - jokaisessa kohtaamassaan pisteessä $(x, y) \in D$.

Sitten tehtävään: Etsi käyräparven

$$x^2 + 2xy - y^2 = c, \quad c \in \mathbf{R},$$

kohtisuorat leikkaajat.

4. Erään järven kalakannaksi laskettiin vuonna 1990 5000 yksilöä ja vuonna 2000 3600 yksilöä. Mallinnetaan kalapopulaatiota $p(t)$ logistisella yhtälöllä

$$\dot{p}(t) = rp(t)\Big(1 - \frac{p(t)}{K}\Big).$$

Parametrin r arvoksi arvioidaan 0.1 (kun ajan t yksikkö on vuosi), mutta ympäristön kantokykyä K ei tunneta.

(a) Ratkaise K, (b) ennusta kalakanta vuonna 2010.

Huom. Jos myös r on tuntematon, tarvitaan (vähintään) kolme populaation tunnettua arvoa. Tällöin päädytään yhtälöryhmään, joka (yleensä) pitää ratkaista jollain numeerisella keinolla.

5. Tarkastellaan tartuntatautien SIR-mallia

$$\frac{ds}{dt}(t) = -\alpha R_0 s(t)i(t), \quad \frac{di}{dt}(t) = \alpha R_0 s(t)i(t) - \alpha i(t), \quad \frac{dr}{dt}(t) = \alpha i(t).$$

Oletetaan, että $0 < i(0) < 1$, $s(0) + i(0) = 1$ ja $R_0 > 1$. Osoita, että koko epidemian aikana tautiin sairastuneiden määrä on R_0:n funktiona kasvava.

Ohje. Tarkastele funktiota $s_\infty(R_0)$ ($s_\infty = \lim_{t\to\infty} s(t)$). Voidaan olettaa tunnetuksi, että $0 < s_\infty(R_0) < 1/R_0$ kaikilla $R_0 > 1$ (jossa ylärajan osoittaminen on hyvä harjoitus).