DY I, syksyn 2009 luentopäiväkirja

October 15, 2009

Tekstissä esiin tulevat sivunumerot sekä lauseiden, määritelmien ja yhtälöiden numerot viittaavat luentomonisteen numerointiin versiossa 9. lokakuuta 2008, siis siinä joka on kurssin kotisivulla. Monisteen painovirheet yritetään oikaista tässä päiväkirjassa. Yksi toistuva, tosin harmiton, virhe on jakoviivan puuttuminen. Esimerkiksi lukee

$$\begin{matrix}\partial M\\ \partial y\end{matrix}.$$

Parempi olisi, jos lukisi

$$\frac{\partial M}{\partial y}.$$

1 Viikko 37

Sivut 1-14. Monisteen lause 1.14 sivutettiin. Esiteltiin peruskäsitteet: Differentiaaliyhtälö (DY), sen kertaluku (kl.) ja yleinen ratkaisu sekä alkuarvotehtävä (AAT).

Otettiin käyttöön seuraava keskeinen lause, joka takaa 1. kl. yhtälöä koskevalle AAT:lle ratkaisun olemassaolon ja yksikäsitteisyyden:

Theorem 1.1 (Lokaali OY-lause)**.** *Olkoon D tason $\mathbb{R}^2$ alue ja olkoot funktio f sekä sen osittaisderivaatta $\frac{\partial f}{\partial y}$ jatkuvia siinä. Olkoon $(x_0, y_0) \in D$.*

(a) Tällöin AAT:llä

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

on jollakin välillä I määritelty ratkaisu $y : I \to \mathbb{R}$.

(b) Olkoot $y_k : I_k \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2$, kaksi kyseisen AAT:n ratkaisua, jotka kulkevat D:ssä, ts. $(x, y_k(x)) \in D$ $\forall x \in I_k$, $k = 1, 2$. Tällöin

$$y_1(x) = y_2(x) \quad \forall x \in I_1 \cap I_2.$$

Proof. Esitetään kurssissa Differentiaaliyhtälöt II. □

Theorem 1.2 (Local EUT)**.** *Let D be a domain in $\mathbb{R}^2$ and a function f and its partial derivative $\frac{\partial f}{\partial y}$ be continuous on D. Suppose $(x_0, y_0) \in D$.*

(a) Then the initial value problem (IVP)

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

has a solution $y : I \to \mathbb{R}$, defined on some interval I.

(b) Let $y_k : I_k \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2$, be two solutions to IVP above, such that $(x, y_k(x)) \in D$ $\forall x \in I_k$, $k = 1, 2$. Then

$$y_1(x) = y_2(x) \quad \forall x \in I_1 \cap I_2.$$

Käsiteltiin 1. kl. yhtälön päätyypeistä kaksi, separoituvat yhtälöt ja eksaktit yhtälöt.
Luentomonisteen painovirheitä:
– Sivun 11 puolivälissä pitäisi lukea

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(\xi, y)\, d\xi + \int_{y_0}^{y} N(x_0, \eta)\, d\eta.$$

2 Viikko 38

Sivut 15-23 ja 27-28. Vakion varioimiskeino sivutettiin tässä yhteydessä, samoin yhtälöt (1.28) ja (1.29). Esitettiin lause 1.17, ensimmäisen kertaluvun lineaarinen DY, sen ratkaiseminen ja tulkinta dynaamisena systeemina sekä sovellus Sekoitusmallit.

– Lauseen 1.17 todistuksen sivulla 15 pitäisi mennä tyyliin

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x)M(x,y)) - \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x)N(x,y)) \\
=&\mu(x)\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \mu'(x)N(x,y) - \mu(x)\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) \\
=&\mu(x)\left(\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\right) - \mu'(x)N(x,y) \\
=&\mu(x)f(x)N(x,y) - \mu'(x)N(x,y) \\
=&\big(\mu(x)f(x) - \mu'(x)\big)N(x,y).
\end{aligned}$$

Kyseinen lause pätee myös muodossa: Jos funktio

$$g(y) = \frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)\right)$$

riippuu vain y:stä, niin yhtälöllä

$$M(x,y) + N(x,y)\, y'(x) = 0$$

on integroiva tekijä

$$\mu(y) = \exp(\int g(y)\, dy).$$

Sekoitusmalli:

Astiaan A virtaa nopeudella $F_{in}(t)\, l/min$ liuosta, jonka pitoisuus on $a(t)\, kg/l$ ja sitä pois täysin sekoittunutta liuosta nopeudella $F_{out}(t)\, l/min$, missä t on aika. Halutaan tietää, mikä on A:n liuoksen pitoisuus hetkellä t.

Tarkasteltavat funktiot ja alkuehdot:
– $V(t)$ = liuoksen määrä A:ssa hetkellä t.

– $x(t)$ = tarkasteltavan aineen (suolan) määrä (massa) A:ssa hetkellä t.
– $p(t)$ = tarkasteltavan aineen (suolan) pitoisuus A:ssa hetkellä t (eli se mitä haetaan).
– $V(0) = V_0$ ja $x(0) = x_0$ (alkuehdot).
Tällöin saadaan

$$p(t) = \frac{x(t)}{V(t)} \quad \text{ja} \quad V(t) = V_0 + \int_0^t (F_{in}(\tau) - F_{out}(\tau))\, d\tau$$

ja $x(t)$:lle saadaan 1.kl. lineaarinen DY

$$\dot{x}(t) = a(t)F_{in}(t) - \frac{F_{out}(t)}{V(t)}\, x(t) = a(t)F_{in}(t) - \frac{F_{out}(t)}{V_0 + \int_0^t (F_{in}(\tau) - F_{out}(\tau))\, d\tau}\, x(t).$$

3 Viikko 39

Käsiteltiin Bernoullin yhtälö s. 25-26; Populaatiomallit s. 28-31; Tartuntatautimallit s. 35-37 (38 jäi viikolle 40).

Logistisen yhtälön yhteydessä esitettiin (ilman todistusta) seuraava lause, joka on globaali versio OY-lauseesta:

Theorem 3.1 (Reunalta reunalle-lause (RR-lause))**.** *Olkoon D tason $\mathbb{R}^2$ alue ja olkoot funktio f sekä sen osittaisderivaatta $\frac{\partial f}{\partial y}$ jatkuvia siinä. Olkoon $(x_0, y_0) \in D$.*
(a) Tällöin AAT:llä

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

on (maksimaali)ratkaisu $y : I \to \mathbb{R}$, jossa ratkaisukäyrä $\{(x, y(x)) \,|\, x \in I\} \subset D$ kulkee alueen D reunalta reunalle.
(b) (Maksimaali)ratkaisu $y : I \to \mathbb{R}$ on yksikäsitteisesti määrätty, ja kaikki muut AAT:n ratkaisut D:ssä ovat sen rajoittumia.

Proof. Esitetään mahdollisesti kurssissa Differentiaaliyhtälöt II. □

The same in English:

Theorem 3.2 (From Boundary to Boundary Theorem (BBT))**.** *Let D be a domain in $\mathbb{R}^2$ and a function f and its partial derivative $\frac{\partial f}{\partial y}$ be continuous on D. Suppose $(x_0, y_0) \in D$.*
(a) Then the initial value problem (IVP)

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

has a (maximal) solution $y : I \to \mathbb{R}$ such that the solution curve $\{(x, y(x)) \,|\, x \in I\} \subset D$ goes from boundary to boundary in D.
(b) The (maximal) solution $y : I \to \mathbb{R}$ is uniquely determined, and all the other solutions in D to IVP are restrictions of it.

Tehtiin seuraava logistisen yhtälön kvalitatiivinen analyysi: Itse yhtälöllä on kaksi triviaaliratkaisua $N \equiv 0$ ja $N \equiv K$. RR-lause on voimassa koko tasossa $\mathbb{R}^2$. Oletetaan, että $K = 2r/\alpha > 0$ ja $N_0 = N(0) > 0$. Silloin on kaksi tapausta , I: $0 < N_0 < K$ ja II:

$N_0 > K$ (jos $N_0 = K$ niin $N \equiv K$). AAT:n ratkaisuväli olkoon $\Delta = [0, \delta[$ (ei välitetä arvoista $t < 0$).

Tapaus I: $0 < N(t) < K$ kaikilla $t \in \Delta$ (1-käsitteisyys). RR-lauseesta seuraa että $\delta = \infty$! Yhtälön oikeasta puolesta nähdään että $\dot{N}(t) > 0$ kaikilla $t \geq 0$. Siten $N(t)$ on aidosti kasvava funktio. Koska $\Delta = [0, \infty[$, voidaan puhua raja-arvosta $\lim_{t\to\infty} N(t)$. Koska funktio on kasvava ja ylhäältä rajoitettu, raja-arvo on olemassa ja sille pätee

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \sup\{N(t) \,|\, t \geq 0\} \leq K.$$

Tapaus II: $K < N(t) \leq N_0$ kaikilla $t \in \Delta$. Nytkin $\Delta = [0, \infty[$. Funktio on aidosti vähenevä ja alhaalta rajoitettu. Siten raja-arvo on olemassa ja sille pätee

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \inf\{N(t) \,|\, t \geq 0\} \geq K.$$

Lemma 3.3. *Olkoon $x(t)$ välillä $[t_0, \infty[$ määritelty derivoituva funktio. Oletetaan, että $x_\infty = \lim_{t\to\infty} x(t) \in \mathbb{R}$ ja $\dot{x}_\infty = \lim_{t\to\infty} \dot{x}(t)$ ovat olemassa. Tällöin*

$$\dot{x}_\infty = 0.$$

Huom. Lemman oletus, että on olemassa $\lim_{t\to\infty} x(t) \in \mathbb{R}$, voidaan korvata oletuksella, että $x(t)$ on rajoitettu välillä $[t_0, \infty[$.

The same in English:

Lemma 3.4. *Let $x(t)$ be a differentiable function defined on the interval $[t_0, \infty[$. Suppose that there exist $x_\infty = \lim_{t\to\infty} x(t) \in \mathbb{R}$ and $\dot{x}_\infty = \lim_{t\to\infty} \dot{x}(t)$. Then*

$$\dot{x}_\infty = 0.$$

Remark. Supposing that there exists $x_\infty = \lim_{t\to\infty} x(t) \in \mathbb{R}$, can be replaced by supposing $x(t)$ is bounded on $[t_0, \infty[$.

Lemman 3.3 todistus. Vastaoletus: $\dot{x}_\infty = 2a \neq 0$. Oletetaan vaikka $a < 0$. Silloin on olemassa sellainen t_1, että $|\dot{x}(t) - 2a| < |a|$ kaikilla $t \geq t_1$. Tällöin erityisesti $\dot{x}(t) < 2a + |a| = a < 0$ kaikilla $t \geq t_1$. Saadaan integraalin monotonisuutta käyttäen arvio

$$x(t) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t} \dot{x}(\tau)\, d\tau \leq \int_{t_1}^{t} a\, d\tau = a(t - t_1) \quad \forall t \geq t_1.$$

Siten

$$x(t) \leq x(t_1) + a(t - t_1) \to -\infty, \text{ kun } t \to \infty \ (a < 0),$$

mikä on ristiriidassa $x(t)$:n rajoittuneisuuden kanssa. □

Corollary 3.5. *Oletetaan, että logistisessa yhtälössä pätee $K > 0$. Olkoon $N_0 > 0$ ja olkoon $N(t)$ vastaavan AAT:n ratkaisu. Tällöin*

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = K.$$

Proof. Merkitään $a = \lim_{t\to\infty} N(t)$. Tällöin

$$\lim_{t\to\infty} \dot{N}(t) = ra\Big(1 - \frac{a}{K}\Big) = h(a).$$

Lemman mukaan $h(a) = 0$, joten $a = 0$ tai $a = K$. Koska $a \geq \min\{N_0, K\}$, niin $a = K$. □

SIR-tartuntatautimallissa riittää tarkastella paria (2.32) ynnä (2.33), joka voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= -\alpha R_0 s(t) i(t)\\ \frac{di}{dt} &= \alpha R_0 s(t) i(t) - \alpha i(t).\end{aligned}$$

Pisteissä, joissa $\dot{s}(t) \neq 0 \Leftrightarrow s(t)i(t) \neq 0$, muuttuja t voidaan eliminoida pois: on olemassa lokaali käänteisfunktio $t(s)$. Näissä pisteissä $(s, i) = (s(t), i(t))$ ratkaisun uralle (trajectory) si-tasossa sadaan yhtälö

$$\frac{di}{ds} = \frac{di}{dt} : \frac{ds}{dt} = -1 + \frac{1}{R_0}\frac{1}{s}, \qquad (2.35)$$

jonka yleinen ratkaisu on

$$i(s) = C - s + \frac{1}{R_0}\ln s,\ C \in \mathbb{R}. \qquad (2.36)$$

Parametri C saadaan alkuehdoista:

$$C = s(0) + i(0) - \frac{1}{R_0}\ln s(0).$$

Jotta saadaan tartuntatautien kannalta järkeviä ratkaisuja, alkuehdoista oletetaan että $s(0) > 0$ ja $i(0) > 0$. Tällöin voidaan osoittaa, että (helpoiten tässä järjestyksessä):

(1) $s(t) > 0$ kaikilla $t \geq 0$ (funktio (2.36); siksi siinä ei tarvita itseisarvoa $\ln|s|$!).

(2) $i(t) \geq 0$ kaikilla $t \geq 0$ (sillä $s(t)$ vähenevä, kun $i(t) \geq 0$, kasvava kun $i(t) \leq 0$).

(3) $\exists s_\infty = \lim_{t\to\infty} s(t) > 0$ ($s(t)$ monotononen ja rajoitettu, lisäksi (2.36) ja (2)).

(4) $\exists i_\infty = \lim_{t\to\infty} i(t) = i(s_\infty)$.

(5) $i_\infty = 0$ (Lemma 3.3).

Siten s_∞ saadaan yhtälöstä (sen kahdesta ratkaisusta pienempi)

$$0 = i(s_\infty) = C - s_\infty + \frac{1}{R_0}\ln s_\infty. \qquad (2.38)$$

Suure $r_\infty = 1 - s_\infty$ kertoo epidemian aikana sairastuneiden kokonaismäärän suhteellisena osuutena populaatiosta.

Monesti oletetaan myös, että $s(0) + i(0) = 1 \Leftrightarrow r(0) = R(0)/N = 0$. Enemmänkin, taudittomassa populaatiossa $s = 1$ ja $i = 0$. Nämä voidaan valita alkurvoiksi myös, kun epidemia alkaa muutamasta sairaasta yksilöstä: $i(0) \approx 0$ ja $s(0) \approx 1$ (matemaattisesti alkuehto $i(0) = 0$ johtaa ratkaisuun $i \equiv 0$). Tällöin $C \approx 1$, ja saadaan yhtälö

$$i(s) = 1 - s + \frac{1}{R_0}\ln s. \qquad (2.37)$$

4 Viikko 40

Käsiteltiin SIR-malli loppuun s. 38:

Myös SIR-mallissa R_0:n kynnysarvo on $\mathbb{R}_0 = 1$: Populaation tauditon tila $i(t) \equiv 0$ ja $s(t) \equiv 1$ on systeemin

$$\frac{ds}{dt} = -\alpha R_0 s(t) i(t), \quad \frac{di}{dt} = \alpha R_0 s(t) i(t) - \alpha i(t)$$

ratkaisu, nk. *tasapainotila*. Jos $R_0 < 1$, se on *stabiili*, ja epidemiaa ei synny, kun muutama sairas ilmaantuu terveeseen populaatioon. Jos $R_0 > 1$, kyseinen tasapainotila on *epästabiili*, ja syntyy ohimenevä epidemia (autonomiset systeemit, kurssi DY II).

Käsiteltiin 1. kl. DY:n erikoistapaukset tasa-asteinen yhtälö, "ax+by"-tyyppi ja tasa-asteiseksi palautuva tyyppi s. 23-25, 2. kl. lineaarinen DY s. 43-47 (alaluvut 3.1 ja 3.2 pois lukien kertaluvun pudottaminen). Lauseisiin ja määritelmiin tehtiin seuraavat muutokset:

Seurauslauseesta 3.2 esitettiin vain kohta (i) (superpositioperiaate).

Theorem 4.1 (lause 3.4; EUT of 2th order linear differential equations)**.** *Let* $I =]a, b[\subset \mathbb{R}$*. Suppose* $p, q, r \in C(I)$*. Let* $x_0 \in I$ *and* $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ *be arbitrary. The the initial value problem*

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x), \quad y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_1,$$

has a uniquely determined solution $y : I \to \mathbb{R}$*.*

Definition 4.2 (Määritelmä 3.7)**.** Funktiopari (y_1, y_2) on homogeeniyhtälön (HY) $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ *perusjärjestelmä* (pj.; a fundamental solution set in English), jos

(1) funktiot y_1 ja y_2 ovat kyseisen yhtälön ratkaisuja,

(2) kyseisen yhtälön kaikki ratkaisut saadaan muodosta (joka on siis yleinen ratkaisu)

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Theorem 4.3. *Olkoot* $I \subset \mathbb{R}$ *ja* $p, q \in C(I)$*. Tällöin HY:llä* $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ *on perusjärjestelmä välillä* I*.*

Proof. Kiinnitetään $x_0 \in I$. Monisteen OY-lauseen 3.4 mukaan HY:llä on sellaiset ratkaisut $y_k : I \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2$, että

$$\begin{aligned} y_1(x_0) = 1, \ y_1'(x_0) = 0 \\ y_2(x_0) = 0, \ y_2'(x_0) = 1. \end{aligned}$$

Pari (y_1, y_2) toteuttaa luonnollisesti määritelmän 3.7 ehdon (1). Osoitetaan, että myös ehto (2) toteutuu, jolloin pari on perusjärjestelmä: Olkoon $z : I \to \mathbb{R}$ HY:n mielivaltainen ratkaisu. Tarkastellaan funktiota

$$y(x) = z(x_0)y_1(x) + z'(x_0)y_2(x).$$

Se on HY:n ratkaisu välillä I, ja pätee

$$\begin{aligned} y(x_0) &= z(x_0)y_1(x_0) + z'(x_0)y_2(x_0) = z(x_0) * 1 + z'(x_0) * 0 = z(x_0) \\ \text{ja } y'(x_0) &= z(x_0)y_1'(x_0) + z'(x_0)y_2'(x_0) = z(x_0) * 0 + z'(x_0) * 1 = z'(x_0). \end{aligned}$$

OY-lauseen 3.4 1-käsitteisyyspuolen mukaan $y \equiv z$, joten (2) toteutuu. □

Otetaan todistamatta käyttöön muutama apuneuvo lineaarialgebrasta. Tarkastellaan 2×2-neliömatriiseja ja $\mathbb{R}^2$:n pisteitä

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T.$$

Kertolasku matriisi kertaa vektori määritellään yhtälöllä

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Matriisi määrittelee kuvauksen $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$. Se on lineaarikuvaus, sillä jos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ ja $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, niin suoralla laskulla saadaan $A(c_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{y}) = c_1A\mathbf{x} + c_2A\mathbf{y}$. Matriisin A *determinantti* on

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \in \mathbb{R}.$$

Lemma 4.4. *Neliömatriisille $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ seuraavat kohdat ovat yhtäpitäviä*

(1) Jokaista $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ kohti lineaarisella yhtälöparilla $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$, aukikirjoitettuna

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= c_2, \end{aligned}$$

on tasan yksi ratkaisu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

(2) Lineaarikuvaus $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, on injektio.

(3) Lineaarikuvaus $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, on surjektio.

(4) Matriisi A on säännöllinen, ts. sillä on käänteismatriisi $A^{-1} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, jolle pätee ($I$ on tässä identtinen matriisi)

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

(5) $\det A \neq 0$.

Huom. Vastaava tulos pätee kaikille neliömatriiseille $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Definition 4.5. Funktioiden $y_1, y_2 \in C^1(I)$ *Wronskin determinantti* on funktio $W(y_1, y_2) : I \to \mathbb{R}$,

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \quad \forall x \in I.$$

Theorem 4.6 (lause 3.6). *Olkoot $p, q \in C(I)$, ja olkoot $y_k : I \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2$, homogeeniyhtälön $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ kaksi ratkaisua. Tällöin pari (y_1, y_2) on kyseisen yhtälön perusjärjestelmä välillä I tasan silloin, kun $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ jossakin pisteessä $x_0 \in I$.*

Proof. Oletetaan ensin, että (y_1, y_2) on perusjärjestelmä. Olkoot $x_0 \in I$ ja $z_0, z_1 \in \mathbb{R}$ mielivaltaisia. OY-lauseen 3.4 mukaan HY:llä on sellainen ratkaisu $z : I \to \mathbb{R}$, että $z(x_0) = z_0$ ja $z'(x_0) = z_1$. Koska (y_1, y_2) on perusjärjestelmä, joillakin $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ pätee $z(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, ja saadaan

$$A\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y_1(x_0) & y_2(x_0)\\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}z(x_0)\\z'(x_0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}z_0\\z_1\end{bmatrix}.$$

Siten lineaarikuvaus $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on surjektio. Lemman mukaan $W(y_1, y_2)(x_0) = \det A \neq 0$.

Oletetaan sitten, että $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ jossakin pisteessä $x_0 \in I$. Pari (y_1, y_2) luonnollisesti toteuttaa määritelmän 3.7 ehdon (1). Osoitetaan, että se toteuttaa myös ehdon (2). Olkoon $z : I \to \mathbb{R}$ HY:n ratkaisu. Lemman mukaan yhtälöparilla

$$\begin{bmatrix}y_1(x_0)c_1 + y_2(x_0)c_2\\ y_1'(x_0)c_1 + y_2'(x_0)c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y_1(x_0) & y_2(x_0)\\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}z(x_0)\\z'(x_0)\end{bmatrix}$$

on ratkaisu $(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2)$, sillä sen determinantti on $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$. Funktiolle $y(x) = \tilde{c}_1 y_1(x) + \tilde{c}_2 y_2(x)$ pätee $y(x_0) = z(x_0)$ ja $y'(x_0) = z'(x_0)$. OY-lauseen 3.4 mukaan $y \equiv z$. □

Samalla tuli todistetuksi seuraava lause.

Corollary 4.7. *Samat oletukset kuin edellisessä lauseessa. Tällöin pätee joko*

$$\begin{aligned} & W(y_1, y_2)(x) \neq 0 \text{ kaikilla } x \in I \quad ((y_1, y_2) \text{ on pj.})\\ \text{tai}\quad & W(y_1, y_2)(x) = 0 \text{ kaikilla } x \in I \quad ((y_1, y_2) \text{ ei ole pj.})\end{aligned}$$

Huomautus. Harjoitus 4 on hieman uusittu 29.9.

5 Viikko 41

Huomautus. Jotta opiskelijaa ei laitettaisi selkä seinää vasten (integroinnissa), harjoituksen 5 tehtävän 5 yhtälö muutetaan 8.10. muotoon

$$4x^2y'' + 4xy' - y = 4x\sqrt{x}\,e^{-x}.$$

Käsiteltiin 2.kl. lineaariset, vakiokertoimiset homogeeniyhtälöt s. 49-53, kertaluvun pudotus s. 47-48 ja 2.kl. epähomogeeniset lineaariset yhtälöt, erityisesti vakion variointikeino s.53-56. Tässä yhteydessä esitettiin seuraava lause:

Theorem 5.1. *Olkoon funktiopari (y_1, y_2) HY:n $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ perusjärjestelmä, ja olkoon y_p EHY:n $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ yksittäisratkaisu. Tällöin kyseisen EHY:n yleinen ratkaisu on*

$$y(x) = y_p(x) + c_1y_1(x) + c_2y_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Enemmänkin, tämä muoto antaa kaikki EHY:n ratkaisut.

Proof. Aivan kuten lause 1.21. □

Monisteen sivujen 55-56 esimerkissä 3.19 on laskuvirheitä. Pitäisi olla $c_2(x) = \int \sin x \, dx$ $= -\cos x$, jolloin yleiseksi ratkaisuksi tulee

$$y(x) = y_p(x) + c_1 \cos x + c_2 \sin x = -\cos x \ln \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right| + c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

EHY:n yksittäisratkaisu saadaan variointia helpommin usein sopivalla yritteellä, varsinkin jos yhtälö on vakiokertoiminen. Asiaa valaistiin seuraavilla esimerkeillä:

Esim. 1.

$$L(y) = y'' + 3y' + 2y = 3x + 1$$

Siis $r(x) = 3x + 1$, sopiva yrite on polynomi $y(x) = Ax + B$, jossa A ja $B \in \mathbb{R}$ ovat parametreja. Silloin $y' = A$, $y'' = 0$ ja

$$\begin{aligned} &L(y) = 0 + 3A + 2Ax + 2B = 3x + 1 \quad \forall x \;\Leftrightarrow \\ &2A = 3,\; 3A + 2B = 1 \Leftrightarrow A = 3/2,\; B = -7/4. \end{aligned}$$

Siten $y_p(x) = (3/2)x - 7/4$ on EHY:n yksittäisratkaisu.

HY: $L(y) = y'' + 3y' + 2y = 0$, josta karakteristinen yhtälö $r^2 + 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow r_1 = -1,\; r_2 = -2$. Siten HY:n pj. on $(y_1, y_2) = (e^{-x}, e^{-2x})$, ja EHY:n yleinen ratkaisu on

$$y(x) = (3/2)x - 7/4 + c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Esim. 2.

$$L(y) = y'' + 3y' + 2y = e^{3x}$$

Siis $r(x) = e^{3x}$, sopiva yrite on $y(x) = Ae^{3x}$. Silloin $y' = 3Ae^{3x}$, $y'' = 9Ae^{3x}$ ja

$$\begin{aligned} &L(y) = 9Ae^{3x} + 9Ae^{3x} + 2Ae^{3x} = e^{3x} \quad \forall x \;\Leftrightarrow \\ &20A = 1 \Leftrightarrow A = 1/20. \end{aligned}$$

Siten $y_p(x) = (1/20)e^{3x}$ on EHY:n yksittäisratkaisu, ja EHY:n yleinen ratkaisu on

$$y(x) = (1/20)e^{3x} + c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Esim.3.

$$L(y) = y'' - y' - y = \sin x$$

Siis $r(x) = \sin x$, sopiva yrite on $y(x) = A \sin x + B \cos x$, jossa A ja $B \in \mathbb{R}$ ovat parametreja. Silloin $y' = A \cos x - B \sin x$, $y'' = -A \sin x - B \cos x$ ja

$$\begin{aligned} &L(y) = -A \sin x - B \cos x - A \cos x + B \sin x - A \sin x - B \cos x = (-2A + B) \sin x \\ &+ (-A - 2B) \cos x = \sin x \Leftrightarrow -2A + B = 1,\; -A - 2B = 0 = 1 \Leftrightarrow A = -2/5,\; B = 1/5. \end{aligned}$$

Siten $y_p(x) = -(2/5) \sin x + (1/5) \cos x$ on EHY:n yksittäisratkaisu.

HY: $L(y) = y'' - y' - y = 0$, josta karakteristinen yhtälö $r^2 - r - 1 = 0 \Leftrightarrow r_1 = (1 + \sqrt{5})/2,\; r_2 = (1 - \sqrt{5})/2$. Siten HY:n pj. on $(y_1, y_2) = (\exp((1+\sqrt{5})x/2), \exp((1-\sqrt{5})x/2))$, ja EHY:n yleinen ratkaisu on

$$y(x) = -(2/5)\sin x + (1/5)\cos x + c_1 \exp((1+\sqrt{5})x/2) + c_2 \exp((1-\sqrt{5})x/2), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Esim. 4.

$$L(y) = y'' + 3y' + 2y = 3x + 1 + e^{3x}$$

Siis $r(x) = 3x + 1 + e^{3x}$, sopiva yrite on $y(x) = Ax + B + Ce^{3x}$. Itse asiassa lineaarisuuden (superpositio) ja edellisten esimerkkien perusteella saadaan välittömästi $y_p(x) = (3/2)x - 7/4 + (1/20)e^{3x}$.

6 Viikko 42

Käsiteltiin takaa-ajomallit s. 38-40. Tarkastelun alun ote oli hieman laveampi kuin monisteessa, joten sanottakoon siitä muutama sana.

Rajoitutaan taso-ongelmaan, jossa takaa-ajaja ja -ajettava (saalis) liikkuvat xy-tasossa, ja edelleen ongelmatyyppiin, jossa saaliin liike $(a(t), b(t))$ ajan t funktiona tunnetaan, mutta takaa-ajajan liike, paikkavektori $(x(t), y(t))$, on selvitettävänä. Lisäksi takaa-ajajan liikettä ohjaa periaate, että se suuntautuu jatkuvasti kohti saatlista:

Liikkeen suunnan ilmaisee nopeusvektori (derivaattavektori) $\mathbf{v}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$. Siten normaali(vektori) on $\mathbf{n}(t) = (\dot{y}(t), -\dot{x}(t))$ (silloin $\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{n}(t) = 0$, jossa $\cdot$ on $\mathbb{R}^2$:n pistetulo). Saadaan funktioille $x(t)$ ja $y(t)$ ensimmäinen DY

$$\mathbf{n}(t) \cdot (a(t) - x(t), b(t) - y(t)) = 0 \Leftrightarrow (a(t) - x(t))\,\dot{y}(t) - (b(t) - y(t))\,\dot{x}(t) = 0. \qquad (1)$$

Tarvitaan vielä toinen DY. Se puolestaan riippuu vahvasti tilanteen tekijöistä. Esimerkiksi, jos takaa-ajajan nopeus on vakio $\alpha > 0$, niin saadaan

$$|\mathbf{v}(t)| = \alpha \Rightarrow \dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 = \alpha^2. \qquad (2)$$

Pari (1) ja (2) on vaikea ratkaista johtuen sen vahvasta epälineaarisuudesta.

Vielä mutkikkaammaksi tilanne muuttuu, jos takaa-ajajan nopeus α riippuu vaikkapa kulloisesta paikasta $(x(t), y(t))$. Esimerkiksi saalistava haukka muuttaa painovoimakentän potentiaalienergian $E_p(t) = mgy(t)$ (m = massa, g = painovoimavakio) nopeusenergiaksi $E_v(t) = (1/2)m\alpha(t)^2$. Ei oteta huomioon ilmanvastusta. Siten jos $y(0) = y_0$ ja $\alpha(0) = 0$, niin

$$\frac{1}{2}m\alpha(t)^2 = E_v(t) = E_p(0) - E_p(t) = mg(y_0 - y(t)),$$

josta saadaan $\alpha(t) = \sqrt{2g(y_0 - y(t))}$, ja (2) korvautuu yhtälöllä

$$\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 = 2g(y_0 - y(t)). \qquad (3)$$

Melko yleisen alun jälkeen siirrytään monisteen tilanteeseen, joka osataan ratkaista suljetussa muodossa. Ensinnäkin takaa-ajajan nopeus oletetaan vakioksi α. Pätee siis (2). Alkupaikkana olkoon origo: $(x(0), y(0)) = (0, 0)$. Koska nopeus on vakio, hetkellä t takaa-ajaja on kulkenut matkan αt. Toisaalta tämä matka on kuljetun liikeradan pituus, tunnetusti $\int_0^t \sqrt{\dot{x}(\tau)^2 + \dot{y}(\tau)^2}\, d\tau$, joten (saadaan myös integroimalla $\int_0^t$ puolittain (2))

$$t = \frac{1}{\alpha} \int_0^t \sqrt{\dot{x}(\tau)^2 + \dot{y}(\tau)^2}\, d\tau. \qquad (4)$$

Oletetaan saaliin liike yksinkertaiseksi: vakionopeudella $\beta > 0$, $\beta < \alpha$, pitkin suoraa $x = a > 0$ ylös päin. Alkupaikkana olkoon piste $(a, 0)$. Siten $(a(t), b(t)) = (a, \beta t)$, ja (1) saa muodon

$$(a - x)\,\dot{y} = (\beta t - y)\,\dot{x}, \qquad (5)$$

josta pisteissä, joissa $\dot{x}(t) \neq 0$,

$$t = \frac{1}{\beta}\Big(y + (a - x)\,\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\Big). \qquad (6)$$

Eliminoidaan t-riippuvuus pois! Vaihdetaan muuttujaa (4):n integraalissa sijoittamalla $x(t)$:n käänteisfunktio $t = t(x)$ ($\dot{x}(t) \neq 0$). Silloin

$$dt = t'(x)\,dx, \quad t'(x) = 1/\dot{x}(t), \quad y(x) = y(t(x)), \quad y'(x) = \dot{y}(t(x))t'(x) = \dot{y}(t)/\dot{x}(t),$$
$$\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,dt = \sqrt{1 + (\dot{y}/\dot{x})^2}\,dx = \sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx, \quad t = 0 \to x = x(0) = 0, \quad t \to x.$$

Saadaan

$$t = t(x) = \frac{1}{\alpha} \int_0^x \sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx. \qquad (7)$$

Yhtälöt (6) ja (7) antavat yhtälön, joka koskee vain muuttujia x ja y:

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^x \sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx = \frac{1}{\beta}\big(y + (a - x)\,y'(x)\big).$$

Derivoimalla saadaan

$$\frac{1}{\alpha}\sqrt{1 + y'(x)^2} = \frac{1}{\beta}\big(y'(x) - y'(x) + (a - x)\,y''(x)\big) = \frac{1}{\beta}(a - x)\,y''(x),$$

siis DY liikkeen radalle xy-faasiavaruudessa. Sijoitetaan $z(x) = y'(x)$, jolloin saadaan separoituva yhtälö

$$\frac{1}{\beta}(a - x)\,z'(x) = \frac{1}{\alpha}\sqrt{1 + z(x)^2}, \qquad (8)$$

josta

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \frac{\beta\,dx}{\alpha(a - x)} \Leftrightarrow \int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \frac{\beta}{\alpha} \int \frac{dx}{(a - x)}\,dx \Leftrightarrow \\
\ln(z + \sqrt{1 + z^2}) = -\frac{\beta}{\alpha}\ln|a - x| + c_1 = \ln\big(c_2|a - x|^{-\beta/\alpha}\big) \Leftrightarrow \\
z + \sqrt{1 + z^2} = c_2|a - x|^{-\beta/\alpha} = c_2(a - x)^{-\beta/\alpha},
\end{aligned}$$

sillä $x(0) < a$ ja yhtäsuuruutta ei saavuteta.

Koska $x(0) = y(0) = 0$, (5):stä saadaan $a\dot{y}(0) = 0 \Rightarrow z(0) = y'(0) = \dot{y}(0)/\dot{x}(0) = 0$. Siten $1 = c_2 a^{-\beta/\alpha} \Rightarrow c_2 = a^{\beta/\alpha}$ ja

$$z+\sqrt{1+z^2}=a^{\beta/\alpha}(a-x)^{-\beta/\alpha}=\bigl(1-x/a\bigr)^{-\beta/\alpha}=:\lambda.$$

Ratkaistaan tästä z. Saadaan $z=(1/2)\bigl(\lambda-\lambda^{-1}\bigr)$. Siten

$$\begin{aligned}
y(x)&=\int z(x)\,dx=\frac{1}{2}\int\Bigl(\bigl(1-x/a\bigr)^{-\beta/\alpha}-\bigl(1-x/a\bigr)^{\beta/\alpha}\Bigr)\,dx\\
&=\frac{a}{2}\int\left(\frac{\bigl(1-x/a\bigr)^{1+\beta/\alpha}}{1+\beta/\alpha}-\frac{\bigl(1-x/a\bigr)^{1-\beta/\alpha}}{1-\beta/\alpha}\right)+c,
\end{aligned}\tag{9}$$

ja alkuehto $x(0)=y(0)=0$ antaa

$$c=\frac{a\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}. \tag{10}$$

Takaa-ajaja saa saaliin kiinni ($\alpha>\beta$), kun $x=a$, jolloin $y=c$, siis pisteessä $\bigl(a,a\alpha\beta/(\alpha^2-\beta^2)\bigr)$. Sijoittamalla saadut $z(x)=y'(x)=\dot y/\dot x$ ja $y(x)$ yhtälöön (6) saadaan funktio $t(x)$ ja esimerkiksi takaa-ajoon käytetty aika $t(a)$. Alkuperäisen systeemin (5) ja (2) ratkaisuväli nollasta eteen päin on $[0,t(a)[$.

Ratkaistaan kurssin lopuksi klassinen taivaanmekaniikan ongelma, **planeetan liike auringon ympäri**. Lähteenä on Ritzer and Rose: Differential Equations with Applications, McGraw-Hill, 1968, jonka tekstiin on tehty vähäisiä lisäyksiä.

Liike mallinnetaan tasoliikkeenä radan tasossa, jolloin sen määrää tyhjentävästi paikkavektori $(x(t),y(t))$ ajan t funktiona. Napakoordinaateissa saadaan seuraavat esitykset:

$$\begin{aligned}
x(t)&=r(t)\cos\theta(t)\\
y(t)&=r(t)\sin\theta(t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot x(t)&=\dot r\cos\theta-r\dot\theta\sin\theta\\
\dot y(t)&=\dot r\sin\theta+r\dot\theta\cos\theta,
\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\ddot x(t)&=\ddot r\cos\theta-2\dot r\dot\theta\sin\theta-r(\dot\theta)^2\cos\theta-r\ddot\theta\sin\theta\\
\ddot y(t)&=\ddot r\sin\theta+2\dot r\dot\theta\cos\theta-r(\dot\theta)^2\sin\theta+r\ddot\theta\cos\theta.
\end{aligned}$$

Newtonin 2. lain mukaan

$$\mathbf{F}=m\mathbf{a}, \tag{2}$$

jossa $\mathbf{F}$ on ulkoinen voima(vektori), m on massa ja $\mathbf{a}(t)=(\ddot x(t),\ddot y(t))$ on kiihtyvyys(vektori). Sijoitetaan aurinko origoon, jolloin vetovoima vetää planeettaa origoa kohti. Välihuomautus: Jos liikettä käsiteltäisiin xyz-avaruudessa $\mathbb{R}^3$, Newtonin vetovoimalaista (siitä tuonnempana) ja laista (2) saataisiin suoraviivaisesti 2.kl. (epälineaarinen) DY-systeemi

$$\ddot x=-\frac{Kx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\quad \ddot y=-\frac{Ky}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\quad \ddot z=-\frac{Kz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

jossa K on vakio. Systeemien OY-lause on voimassa $\mathbb{R}^7$:n, $(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \in \mathbb{R}^7$, alueessa $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}) \times \mathbb{R}^3$. Tässä pysyvä systeemin ratkaisu on yksikäsitteisesti määrätty, kun alkuehto on annettu. Jos siis saamme tavalla tai toisella ratkaisun, se on ainoa oikea. Palataan takaisin liikkeen mallintamiseen tasoliikkeenä. Essitetään yhtälö (2) ortonormaalissa kannassa $(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta)$, jossa $\mathbf{u}_r$ on paikkavektorin (x, y) suuntainen (hetkellä t). Tämä kanta on

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_r &= \frac{1}{r}(x, y) = (\cos\theta, \sin\theta) \\ \mathbf{u}_\theta &= \frac{1}{r}(-y, x) = (-\sin\theta, \cos\theta). \end{aligned} \qquad (3)$$

Newtonin vetovoimalain mukaan

$$\mathbf{F} = -\frac{Km}{r^2}\,\mathbf{u}_r, \qquad (4)$$

jossa vakio K sisältää auringon massan. Vektorilla $\mathbf{a}$ on kannassa $(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta)$ yksikäsitteinen esitys

$$\mathbf{a} = a_r\,\mathbf{u}_r + a_\theta\,\mathbf{u}_\theta, \quad a_r, a_\theta \in \mathbb{R}, \qquad (5)$$

jossa $a_r = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_r$ ja $a_\theta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_\theta$. Koska $\mathbf{a} = (\ddot{x}, \ddot{y})$, yhtälöistä (1) ja (3) saadaan pienellä laskulla

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}. \end{aligned} \qquad (6)$$

Yhtälöt (2), (4) ja (5) antavat $a_r = -K/r^2$ ja $a_\theta = 0$. Kun vielä sijoitetaan yhtälö (6), saadaan planeetan liikkeen DY-systeemi napakoordinaateissa

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 &= -\frac{K}{r^2} \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} &= 0. \end{aligned} \qquad (7)$$

Siis pätee

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = 0 \Leftrightarrow r^2\dot{\theta} = c_1. \qquad (8)$$

Yhtälöllä (8) on tulkinta (Keplerin 2. laki): Olkoon $A(t)$ paikkavektorin (x, y) ajassa t pyyhkimä ala. Silloin

$$\dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{c_1}{2} \Rightarrow A(t) = \frac{1}{2}c_1 t \quad (A(0) = 0).$$

Jos parista (7) eliminoitaisiin (8):n avulla θ pois, saataisiin

$$\ddot{r} + \frac{K}{r^2} - \frac{c_1^2}{r^3} = 0,$$

2. kl. epälineaarinen DY, joka kyllä ratkeaisi implisiittimuotoon, joka on hankala. Sen sijaan lasketaan liikkeen rata (orbit) $r = r(\theta)$ $r\theta$-faasiavaruudessa. Koska $r(t) = r(\theta(t))$, niin käyttäen yhtälöä (8) saadaan

$$
\begin{aligned}
\dot{r} &= \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} = c_1 r^{-2}\frac{dr}{d\theta},\\
\ddot{r} &= \frac{d}{dt}\Big(c_1 r^{-2}\frac{dr}{d\theta}(\theta(t))\Big) = c_1\Big(-2r^{-3}\dot{r}\frac{dr}{d\theta} + r^{-2}\frac{d^2r}{d\theta^2}\dot{\theta}\Big) = c_1\Big(-2c_1 r^{-5}\Big(\frac{dr}{d\theta}\Big)^2 + c_1 r^{-4}\frac{d^2r}{d\theta^2}\Big)\\
&= -c_1^2 r^{-2}\Big(2r^{-3}\Big(\frac{dr}{d\theta}\Big)^2 + r^{-2}\frac{d^2r}{d\theta^2}\Big).
\end{aligned} \tag{9}
$$

Siirrytään funktioon

$$u(\theta) = r(\theta)^{-1}, \tag{10}$$

jolloin

$$\frac{du}{d\theta} = -r^{-2}\frac{dr}{d\theta}, \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} = 2r^{-3}\Big(\frac{dr}{d\theta}\Big)^2 - r^{-2}\frac{d^2r}{d\theta^2}. \tag{11}$$

Siten

$$\ddot{r} = -c_1^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} \quad \text{ja} \quad -Ku^2 = -Kr^{-2} = \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 = -c_1^2 u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - c_1^2 u^3,$$

josta saadaan 2. kl. lineaarinen, vakiokertoiminen DY

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = Kc_1^{-2}. \tag{12}$$

Se osataan ratkaista: HY:n pj. on $(\cos\theta, \sin\theta)$, sillä $\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow r = \pm i$. EHY:llä (12) on yksittäisratkaisu $u \equiv Kc_1^{-2}$. Siten EHY:n yleinen ratkaisu on

$$u(\theta) = Kc_1^{-2} + c_2\cos\theta + c_3\sin\theta = Kc_1^{-2} + c\cos(\theta - \delta), \tag{13}$$

jossa $c = (c_2^2 + c_3^2)^{1/2}$ ja δ on vektorin (c_2, c_3) sunntakulma. Siten

$$r(\theta) = u(\theta)^{-1} = \Big(Kc_1^{-2} + c\cos(\theta - \delta)\Big)^{-1}. \tag{14}$$

Tyypillinen alkuehdossa on annettu $x(t_0)$, $y(t_0)$, $\dot{x}(t_0)$ ja $\dot{y}(t_0)$. Välikommentti: Jotta liike voidaan käsitellä xy-tasossa, xyz-avaruudessa täytyy päteä $z(t_0) = \dot{z}(t_0) = 0$. Annetuista alkuarvoista voidaan laskea $r_0 = r(t_0)$, $\theta_0 = \theta(t_0)$, $\dot{r}_0 = \dot{r}(t_0)$ ja $\dot{\theta}_0 = \dot{\theta}(t_0)$, joista saadaan

$$r(\theta_0) = r_0 \quad \text{ja} \quad \frac{dr}{d\theta}(\theta_0) = \dot{r}(t_0)/\dot{\theta}(t_0) = \dot{r}_0/\dot{\theta}_0. \tag{15}$$

Vastaavasti

$$u(\theta_0) = 1/r_0 \quad \text{ja} \quad \frac{du}{d\theta}(\theta_0) = -r(\theta_0)^{-2}\frac{dr}{d\theta}(\theta_0) = -\frac{\dot{r}_0}{r_0^2\dot{\theta}_0}. \tag{16}$$

Parametreille c_1 c ja δ saadaan yhtälöryhmä

$$c_1 = r_0^{-2}\dot{\theta}_0, \quad Kc_1^{-2} + c\cos(\theta_0 - \delta) = r_0^{-1}, \quad c\sin(\theta_0 - \delta) = -\frac{\dot{r}_0}{r_0^2\dot{\theta}_0}. \tag{17}$$

Rata voidaan kirjoittaa muotoon

$$r(\theta) = \frac{ep}{1 + e\cos(\theta - \delta)}, \tag{18}$$

jossa $e = cc_1^2/K$ ja $p = 1/c$. Tunnetusti kyseessä on napakoordinaateissa esitetty kartioleikkaus, jonka eksentrisyys on e. Jos $e < 1$, rata on ellipsi, jonka toinen polttopiste on origossa, siis auringon kohdalla. Tämä tunnetaan Keplerin 1. lakina. Funktiolle $\theta = \theta(t)$ sadaan 1 kl. separoituva DY

$$\dot{\theta}(t) = c_1 r^{-2} = c_1\Big(Kc_1^{-2} + c\cos(\theta - \delta)\Big)^2. \tag{19}$$

Huomautettakoon lopuksi, että ratkaisu pätee kaikelle liikkeelle, jossa vaikuttaa Newtonin vetovoimalain muotoa oleva keskeisvoima, siis suuruudeltaan kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön. Sähköinen vetovoima on tällainen, mikä antaa klassisen atomimallin: elektroni kiertää protonia pitkin ellipsirataa.