Differentiaaliyhtälöt I, harj. 5

1. Olk. S = alttiiden lkm
I = infektoituneiden lkm
R = poistuneiden lkm
$\alpha > 0$ parantumisaste
$\beta > 0$ tarttuvuusaste

Väestön syntyy yht. paljon kuin kuolee $\left\{ \begin{array}{l} \mu > 0 \text{ syntyvyys- eli samalla kuolleisuusaste} \\ N = S + I + R \quad \text{vakio (populaation koko)} \end{array} \right.$

$p \geq 0$ rokotettujen osuus vastasyntyneistä
$R_0 = \frac{\beta N}{\alpha}$ kontaktiluku

Tällöin

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI - \mu S + (1-p)\mu N \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I - \mu I \\ \frac{dR}{dt} = \alpha I - \mu R + p\mu N, \end{cases}$$

missä termit $-\mu S$, $-\mu I$ & $-\mu R$ kuvaavat kuolleisuutta väestöryhmissä S, I & R & $(1-p)\mu N$ (& vastaavasti $p\mu N$) rokottamatta jääviä (& vastaavasti rokotettuja) vastasyntyneitä.

Tauti voidaan eliminoida

$$\Longleftrightarrow \left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0} = (\beta S(0) - \alpha - \mu) I(0) < 0$$

$$\Longleftrightarrow S(0) < \frac{\alpha + \mu}{\beta}$$

Toisaalta $S(0) = (1-p)N$ (rokottamattomat hetkellä $t=0$), jolloin ehdoksi tulee $(1-p)N < \frac{\alpha+\mu}{\beta}$

$\iff R_0^{rok} = \frac{(1-p)\beta N}{\alpha+\mu} < 1$ (rokottamattomien kontaktiluku)

$\iff 1 > (1-p)\frac{\beta N}{\alpha}\frac{\alpha}{\alpha+\mu} = (1-p)R_0\frac{1}{1+\frac{\mu}{\alpha}}$ (I)

$\iff p > 1 - \frac{1+\frac{\mu}{\alpha}}{R_0}$

Alla nähdään, että $\frac{\mu}{\alpha} << 1 \Rightarrow$ Ehdoksi tulee

$p > 1 - \frac{1}{R_0}$

Tauti	R_0	$p = 1 - \frac{1}{R_0}$
Sikotauti	18	17/18 = 94,4%
Vihurirokko	7	6/7 = 85,7%
Tuhkarokko	17	16/17 = 94,1%

Sairastumisiän odotusarvo (luennot)

$T = \frac{1}{\beta\bar{I}+\mu}$

Tasapainotilassa, $t \to \infty$:

$$\begin{cases} 0 = \frac{dI}{dt} = (\beta\bar{S}-\alpha-\mu)\bar{I} \iff \bar{S} = \frac{\alpha+\mu}{\beta} & (\bar{I}>0, \text{ ks. alla}) \\ 0 = \frac{dS}{dt} = -\beta\bar{S}\bar{I} - \mu\bar{S} + (1-p)\mu N \iff \end{cases}$$

$$\bar{I} = \frac{(1-p)\mu N}{\beta\bar{S}} - \frac{\mu}{\beta} = \frac{\mu}{\beta}\left(R_0^{rok}-1\right)$$

Siis $\bar{I} > 0$ l. tauti on endeeminen, kun $R_0^{rok} > 1$;

$$T = \frac{1}{\mu R_0^{rok}} = \frac{1}{(1-p)R_0}\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\alpha}\right) \underbrace{\approx}_{\frac{\mu}{\alpha}<<1} \frac{1}{(1-p)R_0}\frac{1}{\mu}$$

Ol., että y.o. taudin keskim. kesto on 2 viikkoa. Silloin

$$\alpha = \frac{1}{2\,vk} = \frac{1}{2}\,vk^{-1}$$

Ol., että ihmisen eliniän od. arvo on $85\,v = 85 \cdot 52.18\,vk = 4435\,vk$

Silloin

$$\mu = \frac{1}{85\,v} = \frac{1}{4435}\,vk^{-1}$$

Siis todellakin $\frac{\mu}{\alpha} = \frac{2}{4435} = 4,5 \cdot 10^{-4} \ll 1$

$$\Rightarrow T \approx \frac{1}{\mu(1-p)R_0} = \frac{85}{(1-p)R_0}\,v$$

a) (ketään ei rokoteta): $p = 0 \Rightarrow T = \frac{85}{R_0}\,v$

Sairaus	T
Sikotauti	$(85/18)v = 4.7\,v$
Vihurirokko	$(85/7)v = 12.1\,v$
Tuhkarokko	$(85/17)v = 5.0\,v$

kyseessä lastentauti

b) (rokotukset eivät riitä taudin eliminoimiseen):

Olk. kyseessä esim. sikotauti & $R_0^{rok} = 3 > 1$. Tällöin

$$3 \overset{(I)}{=} (1-p)R_0 = (1-p)\cdot 18 \text{ l. } p = \frac{5}{6} < \frac{17}{18}.$$

Nyt $T = \frac{1}{\mu R_0^{rok}} = \frac{85\,v}{3} = 28,3\,v$, joten kyseessä on aikuisten tauti (& silloin vaarallinen).

DYI

5.2. (I) $\frac{dx}{dt} = 30x(1-x)$, $x(0) = 0.2$

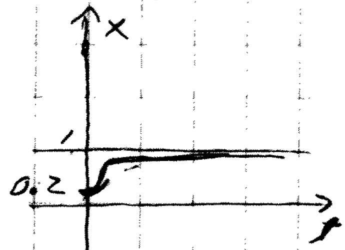
a) Triv. ratk. $x \equiv 0$ & $x \equiv 1$.

$(I) \Leftrightarrow 30\int dt + C_1 = \int \frac{dx}{x(1-x)}$, $0 < x < 1$. (koska $0 < x(0) < 1$),

& $\frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$

$\Rightarrow 30t + C_1 = \int \frac{dx}{x(1-x)} = \ln x - \ln(1-x)$

$= \ln \frac{x}{1-x}$



$\Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = Ce^{30t}$, $C \in \mathbb{R}$

$x(0) = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = C \Leftrightarrow C = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow x \cdot \left(1 + \frac{1}{4}e^{30t}\right) = \frac{1}{4}e^{30t} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4e^{-30t}+1} \xrightarrow[t\to\infty]{} 1$

b) (Euler) $x'(t) = f(x,t) = 30x(1-x)$

$x_0 = x(0) = 0.2$, $h = 0.1$

$t_k = kh = 0.1k$

$x_{k+1} = x_k + h f(x_k, t_k)$

$= x_k + 0.1 \cdot 30 x_k (1 - x_k)$

$= 4x_k - 3x_k^2$

t_k	x_k	$x(t_k)$
0	0.2	0.2
0.1	0.68	0.834
0.2	(!) 1.3328	0.990
0.3	0.00213	0.9995
0.4	0.00852	0.99998

(Eroavuuden syy: Eulerin menetelmä käy vain hyvin lähellä pistettä $t_0 = 0$, koska 30 on suuri.)

3. $\frac{dy}{dx} = y\sqrt{1-y} = f(x,y)$, $y(0) = 0.5$

$y_0 = y(0) = 0.5$
$x_k = kh$

$y_{k+1} = y_k + h\,f(x_k, y_k) = y_k + h\,y_k\sqrt{1-y_k}$
Val. $h = 0.1$

k	x_k	y_k
0	0	0.5
1	0.1	0.5353553
2	0.2	0.5718477
⋮	0.3	0.6092657
	0.4	0.6473501
	0.5	0.6857926
	0.6	0.7242341
	0.7	0.7622661
	0.8	0.7994327
	0.9	0.8352350
10	1.0	0.8691383
	1.1	0.9005792
	1.2	0.9289754
	1.3	0.9537330
	1.4	0.9742476
	1.5	0.9898819
	1.6	0.9998390
	1.7	1.0011077 > 1

Laskenta pysähtyy (Tarkalle ratkaisulle y on $y(x) \to 1$, kun $x \to 2\ln(1+\sqrt{2}) \approx 1.76$ vasemmalta).

4.

a) $\mu = 3.1 \qquad x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$

$x_0 = 0.5$
$x_1 = 3.1 \cdot 0.5 \cdot (1 - 0.5) = 0.775$
$x_2 = 0.5405625$
$x_3 = 0.7698995$
$x_4 = 0.5491782$
$x_5 = 0.7675026$
$x_6 = 0.5531711$
$x_7 = 0.7662356$
$x_8 = 0.5552675$
$x_9 = 0.7655319$
$x_{10} = 0.5564290$
$x_{11} = 0.7651289$
$x_{12} = 0.5570707$
$x_{13} = 0.7648960$
$x_{14} = 0.5574733$
$x_{15} = 0.7647601$

Siis suurilla n $x_{2n} \approx 0.5578$ $x_{2n+1} \approx 0.765$

b) $\mu = 3.5$

$x_0 = 0.5$
$x_1 = 0.875$
$x_2 = 0.3828125$
$x_3 = 0.8269348$
$x_4 = 0.5008976$
$x_5 = 0.874997$
$x_6 = 0.3828202$
$x_7 = 0.826941$
$x_8 = 0.5008838$
$x_9 = 0.8749972$
$x_{10} = 0.3828182$

Suurilla n likimain jaksollinen ratk. $x_{4n} \approx 0.501$
$x_{4n+1} \approx 0.875$
$x_{4n+2} \approx 0.383$
$x_{4n+3} \approx 0.827$

c) $\mu = 3.7$

$x_0 = 0.5$
$x_1 = 0.925$
$x_2 = 0.2566875$
$x_3 = 0.7057564$
$x_4 = 0.7686532$
$x_5 = 0.6591455$
$x_6 = 0.8312889$
$x_7 = 0.5189161$
$x_8 = 0.9236758$
$x_9 = 0.2608453$
$x_{10} = 0.7133785$
$x_{11} = 0.7565373$
$x_{12} = 0.6814976$
$x_{13} = 0.8031166$
$x_{14} = 0.5850449$
$x_{15} = 0.8982391$
$x_{16} = 0.3382006$
$x_{17} = 0.8281375$
$x_{18} = 0.5266053$
$x_{19} = 0.9223808$
$x_{20} = 0.2648992$
$x_{21} = 0.720492$
$x_{22} = 0.7451178$

Nyt $x_7 \approx x_{18}$, $x_8 \approx x_{19}$ jne. yleisesti näyttäisi olevan

$$x_{n+11} \approx x_n, \text{ kun } n > 6.$$

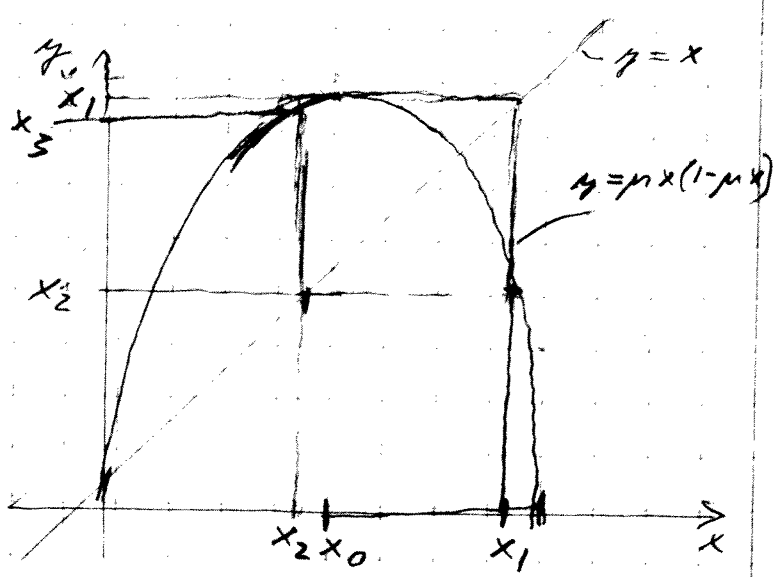
(Eri laskijat ovat saaneet eri tuloksia! Ollaanen siis lähellä kaaosta)

d) $\mu = 3.835$

n	x_n
0	0.5
1	0.75 875
2	0.1516682
3	0.4934301
4	0.7585 844
5	0.1522506
6	0.4949847
7	0.7586533
8	0.1520081
9	0.4943377
10	0.7586269
11	0.1521012

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{3n} \approx 0.495, \\ x_{3n+1} \approx 0.759 \\ x_{3n+2} \approx 0.152 \end{cases}$$

Geometrisesti



Jos merk. $f(x)=\mu x(1-\mu x)$ &

edelleen $f_2(x)=f(f(x))$, $f_3(x)=f(f(f(x)))$

jne. & siis $x_n = f(x_0)$, näyttävät olevan

a) kohdassa kuvaukselle f_2 2 kiintopistettä (ks. Topo I)

n.o. pisteitä x, jotka toteuttavat yhtälön

$x = f_2(x)$ t.s., toistuvasti $x_n = f_2(x_n) = x_{n+2}$.

Vastaavasti b), c) & d) kohdissa

kiintopisteiden lkm:t & jaksojen pituudet

ovat $k = 4, 11$ & 3, n.o. $x_{n+k} = f_k(x_n)$

$= x_n$. $\mu = 3.835$ arvolla kaaosvyöhykkeiden väliin kapeaan rakoon.