TAULU

Differentiaaliyhtälöt I, harjoitus 4, 30.9.–2.9.2008, ratkaisut (JL), 4 sivua

1. **(a)** On etsittävä toisen kertaluvun vakiokertoimisen homogeenisen lineaarisen differentiaaliyhtälön $\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 0$ yleinen ratkaisu. Yhtälön karakteristinen yhtälö on $r^2 - 5r + 6 = (r-3)(r-2) = 0$, ja tämän juuret $r = 3$ ja $r = 2$ ovat erisuuria reaalilukuja. Täten yhtälöllä on funktioista $t \mapsto e^{3t}$ ja $t \mapsto e^{2t}$ koostuva ratkaisujen perusjärjestelmä. Yleinen ratkaisu on siis $x(t) = \underline{C_1 e^{3t} + C_2 e^{2t}}$, kun $t \in \mathbb{R}$ ($C_1, C_2 \in \mathbb{R}$).
(b) Yhtälön $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$ karakteristisella yhtälöllä $r^2 + 4r + 4 = (r+2)^2 = 0$ on kaksoisjuuri $r = -2$, joten yhtälöllä on perusjärjestelmä (e^{-2t}, te^{-2t}) ja siis yleinen ratkaisu $x(t) = \underline{C_1 e^{-2t} + C_2 te^{-2t}}$, kun $t \in \mathbb{R}$ ($C_1, C_2 \in \mathbb{R}$).
(c) Yhtälön $\ddot{x} + 2\dot{x} + 10x = 0$ karakteristisen yhtälön $r^2 + 2r + 10 = (r+1)^2 + 9 = 0$ juuret $r = -1 \pm 3i$ ovat imaginääriset, joten yhtälöllä on perusjärjestelmä $(e^{-t}\cos 3t, e^{-t}\sin 3t)$ ja siis yleinen ratkaisu $x(t) = \underline{C_1 e^{-t}\cos 3t + C_2 e^{-t}\sin 3t}$, kun $t \in \mathbb{R}$ ($C_1, C_2 \in \mathbb{R}$).

2. On ratkaistava seuraavat alkuarvotehtävät.
(a) $\ddot{x} + \dot{x} + x = t$, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Vastaavan homogeeniyhtälön $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$ karakteristisen yhtälön $r^2 + r + 1 = (r + 1/2)^2 + 3/4 = 0$ juuret ovat $r = -1/2 \pm i\sqrt{3}/2$, joten homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu on $x_0(t) = C_1 e^{-t/2}\cos(t\sqrt{3}/2) + C_2 e^{-t/2}\sin(t\sqrt{3}/2)$, kun $t \in \mathbb{R}$ ($C_1, C_2 \in \mathbb{R}$). Alkuperäisen täyden yhtälön oikea puoli eli epähomogeenisuustermi t ei ole homogeeniyhtälön ratkaisu, joten tehdään täyden yhtälön yksittäisen ratkaisun löytämiseksi sovitettava **yrite** muotoa $x(t) = At + B$ ($A, B \in \mathbb{R}$). Tulee ehto $t = x(t) + \dot{x}(t) + \ddot{x}(t) = (At + B) + A + 0$ eli $(A-1)t + (A+B) = 0$; tämä toteutuu kaikilla $t \in \mathbb{R}$ jos ja vain jos $A - 1 = 0$ ja $A + B = 0$ eli jos ja vain jos $A = 1$ ja $B = -1$. Saadaan siis yksittäisratkaisu $x^*(t) = t - 1$. Täten täyden yhtälön yleinen ratkaisu on $x(t) = x_0(t) + x^*(t) = C_1 e^{-t/2}\cos(t\sqrt{3}/2) + C_2 e^{-t/2}\sin(t\sqrt{3}/2) + t - 1$, kun $t \in \mathbb{R}$ ($C_1, C_2 \in \mathbb{R}$). Tällöin

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{2}C_1 e^{-t/2}\cos\frac{t\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}C_1 e^{-t/2}\sin\frac{t\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}C_2 e^{-t/2}\sin\frac{t\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 e^{-t/2}\cos\frac{t\sqrt{3}}{2} + 1.$$

Täten $x(0) = C_1 - 1$ ja $\dot{x}(0) = -C_1/2 + C_2\sqrt{3}/2 + 1$. Näin ollen alkuehto toteutuu jos ja vain jos $C_1 - 1 = -C_1/2 + C_2\sqrt{3}/2 + 1 = 0$ eli jos ja vain jos $C_1 = 1$ ja $C_2 = -1/\sqrt{3} = -\sqrt{3}/3$. Ratkaisu on siis $x(t) = \underline{e^{-t/2}\cos(t\sqrt{3}/2) - (\sqrt{3}/3)e^{-t/2}\sin(t\sqrt{3}/2) + t - 1}$, kun $t \in \mathbb{R}$.
(b) $\ddot{x} + 4x = 0$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$. Karakteristisen yhtälön $r^2 + 4 = 0$ juuret ovat $r = \pm 2i$, joten yhtälön yleinen ratkaisu on $x(t) = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t$. Nyt $\dot{x}(t) = -2C_1\sin 2t + 2C_2\cos 2t$. Siis alkuehto toteutuu $\iff 0 = x(0) = C_1$ ja $1 = \dot{x}(0) = 2C_2 \iff C_1 = 0$ ja $C_2 = 1/2$. Täten alkuarvotehtävän ratkaisu on $x(t) = \underline{(1/2)\sin 2t}$.
(c) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = e^{-t}$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 1$. Vastaavan homogeeniyhtälön $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0$ karakteristisen yhtälön $r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2 = 0$ juuret ovat $r_{1,2} = -1$, joten homogeeniyhtälöllä on perusjärjestelmä (e^{-t}, te^{-t}). Epähomogeenisuustermi e^{-t} ja sen t-kerrannainen ovat siis homogeeniyhtälön ratkaisuja. Täydelle yhtälölle on tällöin tehtävä muotoa $x(t) = At^2 e^{-t}$ ($A \in \mathbb{R}$) oleva yrite. Nyt $\dot{x}(t) = (-At^2 + 2At)e^{-t}$ ja $\ddot{x}(t) = (At^2 - 2At - 2At + 2A)e^{-t} = (At^2 - 4At + 2A)e^{-t}$, joten $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = ((A - 2A + A)t^2 + (-4A + 4A)t + 2A)e^{-t} = 2Ae^{-t} = e^{-t} \iff 2A = 1 \iff A = 1/2$. Tällöin saadaan yksittäisratkaisu $x(t) = (t^2/2)e^{-t}$. Täten täyden yhtälön yleinen ratkaisu on $x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 te^{-t} + (t^2/2)e^{-t} = (C_1 + C_2 t + t^2/2)e^{-t}$. Nyt $\dot{x}(t) = (-C_1 - C_2 t - t^2/2 + C_2 + t)e^{-t} = ((-C_1 + C_2) + (-C_2 + 1)t - t^2/2)e^{-t}$. Siis $x(0) = C_1$ ja $\dot{x}(0) = -C_1 + C_2$. Täten alkuehto toteutuu $\iff C_1 = 1$ ja $-C_1 + C_2 = 1 \iff C_1 = 1$ ja $C_2 = 2$. Näin alkuarvotehtävän ratkaisu on $x(t) = \underline{e^{-t} + 2te^{-t} + (t^2/2)e^{-t}}$, kun $t \in \mathbb{R}$.
2(c). Yrite vaihtoehtoisesti: Täyden yhtälön yksittäisratkaisun löytämiseksi voi myös tehdä yritteen $x(t) = C(t)e^{-t}$, koska perusjärjestelmän funktiot ja epähomogeenisuustermi kaikki sisältävät tekijän e^{-t} (tämä on oikeastaan vakioiden variointia, mutta näin yksinkertaiseksi supistunutta), jolloin sijoitus tuottaa ehdoksi yhtälön $\ddot{C}(t)e^{-t} = e^{-t}$ eli $\ddot{C}(t) = 1$, jonka ratkaisu on $C(t) = \frac{1}{2}t^2 + At + B$; voidaan valita $A = B = 0$.

3. Olkoon $\omega > 0$. Tarkastellaan yhtälöä $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$. (Tapaus $\omega < 0$ on oleellisesti sama, mutta tapaus $\omega = 0$ oleellisesti erilainen kuin tapaus $\omega > 0$.)
(a) Olkoon $x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$, kun $t \in \mathbb{R}$. Tällöin $\dot{x}(t) = -\omega A\sin(\omega t + \delta)$ ja $\ddot{x}(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \delta) = -\omega^2 x(t)$; siis $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Täten x on ratkaisu. Lisäksi, koska x:n lausekkeessa on kaksi eri epäoleellista parametria A ja δ, on x yleinen ratkaisu. Tämän sijasta pitäisi oikeastaan osoittaa, että

$x(0) = A\cos\delta$ ja $\dot{x}(0) = -\omega A \sin\delta$ voivat saada mielivaltaiset arvot, mutta tämä tulee osoitettua (b)-kohdassa.

(b) Olkoon x ratkaisu. Tällöin on olemassa $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, joilla $x(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Etsitään $A \geq 0$ ja $\delta \in [0, 2\pi[$, joilla $x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Koska $A\cos(\omega t+\delta) = A\cos\omega t\cos\delta - A\sin\omega t \sin\delta$, ehdoksi tulee, että $A\cos\delta = C_1$ ja $A\sin\delta = -C_2$. On siis oltava $A^2 = A^2\cos^2\delta + A^2\sin^2\delta = C_1^2 + C_2^2$ eli $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$. Jos nyt $C_1 = C_2 = 0$ eli $A = 0$, voidaan δ valita mielivaltaisesti. Muutoin taas $A > 0$, jolloin ehdoksi tulee, että $\cos\delta = C_1/A$ ja $\sin\delta = -C_2/A$. Koska $(C_1/A)^2 + (C_2/A)^2 = 1$, tällä yhtälöparilla taas on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu $\delta \in [0, 2\pi[$, ja $\delta = \arccos(C_1/A) \in [0,\pi]$, jos $\sin\delta \geq 0$ eli jos $C_2 \leq 0$, ja $\delta = 2\pi - \arccos(C_1/A) \in]\pi, 2\pi[$, jos $\sin\delta < 0$ eli jos $C_2 > 0$.

3. Loppu vaihtoehtoisesti: $\delta = -\arctan(C_2/C_1) \in]-\pi/2, \pi/2[$, kun $\cos\delta > 0$ eli kun $C_1 > 0$; $\delta = \pi - \arctan(C_2/C_1) \in]\pi/2, 3\pi/2[$, kun $\cos\delta < 0$ eli kun $C_1 < 0$; $\delta = \pi/2$, kun $C_1 = 0$ ja lisäksi $\sin\delta > 0$ eli $C_2 < 0$; ja $\delta = 3\pi/2$, kun $C_1 = 0$ ja lisäksi $\sin\delta < 0$ eli $C_2 > 0$.

4. Tarkastellaan yhtälöä $\ddot{x} + 2x^3 - x = 0$ eli $\ddot{x} = x - 2x^3$.

(a) Määrittelemällä $v = \dot{x}$ on $\dot{v} = \ddot{x}$, joten yhtälö on yhtäpitävä ensimmäisen kertaluvun autonomisen systeemin

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = x - 2x^3 \end{cases}$$

kanssa (*autonominen*: oikean puolen funktiot eivät riipu t:stä).

(b) Asetetaan $f(x,v) = v$ ja $g(x,v) = x - 2x^3 = x(1-2x^2)$ kaikilla $(x,v) \in \mathbb{R}^2$. Koska $f(x,v) = 0 \iff v = 0$ ja $g(x,v) = 0 \iff x = 0$ tai $x = \pm\sqrt{2}/2$, niin systeemin tasapainokohdat eli f:n ja g:n yhteiset nollakohdat ovat pisteet $(x,v) = (0,0)$, $(x,v) = (\sqrt{2}/2, 0)$ ja $(x,v) = (-\sqrt{2}/2, 0)$. Nämä antavat systeemille triviaaliratkaisut $(x(t), v(t)) \equiv (0,0)$, $(x(t), v(t)) \equiv (\sqrt{2}/2, 0)$ ja $(x(t), v(t)) \equiv (-\sqrt{2}/2, 0)$.

(c) Puolitasoissa $v > 0$ ja $v < 0$ ei $\dot{x} = v$ vaihda merkkiään, jolloin funktiolla $t \mapsto x(t)$ on derivoituva käänteisfunktio. Tällöin muuttuja t voidaan korvata funktiossa v muuttujalla x, jolloin ketjusäännön nojalla on $\dot{v}(t) = v'(x)\dot{x}(t)$, ja saadaan differentiaaliyhtälö

$$v'(x) = \frac{\dot{v}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{x - 2x^3}{v},$$

joka on separoituva (ja vailla triviaaliratkaisuja). Muuttujat erottamalla saadaan implisiittiratkaisu:

$$\int v\,dv = \int (x - 2x^3)\,dx \iff \tfrac{1}{2}v^2 = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x^4 + C_0 \iff v^2 = x^2 - x^4 + C_1$$

$$(*) \qquad \iff (x^2 - \tfrac{1}{2})^2 + v^2 = C^2 \quad (C > 0).$$

Huomataan edelleen, että suorien $x = 0$ ja $x = \pm\sqrt{2}/2$ rajoittamissa alueissa ei $\dot{v}$ vaihda merkkiään, jolloin funktiossa x voidaan muuttuja t korvata muuttujalla v, ja näin saatu funktio toteuttaa saman implisiittiyhtälön.

(d) Havaitaan, että käyrän leikkauspisteet x-akselin kanssa ovat pisteet $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2} + C}$ ja lisäksi pisteet $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2} - C}$, jos $C < \frac{1}{2}$, ja piste $x = 0$ (joka on jätettävä pois), jos $C = \frac{1}{2}$. Havaitaan myös, että käyrän leikkauspisteet v-akselin kanssa ovat $v = \pm\sqrt{C^2 - \frac{1}{4}}$, jos $C > \frac{1}{2}$, ja $v = 0$, jos $C = \frac{1}{2}$. Origon ulkopuolella käyrä leikkaa koordinaattiakselit kohtisuorasti. Origossa taas käyrä leikkaa itsensä kohtisuorasti ja koordinaattiakselit kulmassa $\pi/4$, sillä jos $C = \frac{1}{2}$, niin I koordinaattineljänneksessä on $v(x) = x\sqrt{1-x^2}$ ja siis $v'(x) = (1-2x^2)/\sqrt{1-x^2} \to 1$, kun $x \to 0$. Funktio $|v|$ saavuttaa suurimman arvonsa C kohdissa $x = \pm\sqrt{2}/2$.

Käyrä $(*)$ on umpinainen ratkaisukäyrä (ympyrän kanssa homeomorfinen), jos $C > \frac{1}{2}$; koostuu origosta ja kahdesta avoimesta ratkaisukaaresta, jos $C = \frac{1}{2}$; ja koostuu kahdesta umpinaisesta ratkaisukäyrästä, jos $C < \frac{1}{2}$.

Aikakehitys nähdään yhtälöstä $\dot{x} = v$: Kun $v > 0$, niin funktio $t \mapsto x(t)$ on aidosti kasvava, ja kun $v < 0$, niin funktio $t \mapsto x(t)$ on aidosti vähenevä. Täydentävä tieto saadaan kaavasta $\dot{v} = x(1-2x^2)$, sillä sen mukaan funktio $t \mapsto v(t)$ on aidosti kasvava, kun $x \leq -\sqrt{2}/2$ tai kun $0 \leq x \leq \sqrt{2}/2$, ja aidosti vähenevä, kun $-\sqrt{2}/2 \leq x \leq 0$ tai kun $x \geq \sqrt{2}/2$. Nähdään siis, että ajan mukana piste (x, v) liikkuu käyrällä myötäpäivään.

Faasikuvio on piirretty sivulle 4.

(e) Käyrän yhtälöstä nähdään, että $|x^2 - \frac{1}{2}| \leq C$ ja $|v| \leq C$ kullakin C, joten kaikki ratkaisut x ja niiden derivaatat $\dot{x}$ ovat rajoitettuja. Tapauksessa $C = \frac{1}{2}$ ajan kasvaessa piste (x, v) etääntyy origosta I ja III neljänneksissä ja lähestyy origoa II ja IV neljänneksissä (onhan $(d/dt)(x^2 + v^2) = 2x\dot{x} + 2v\dot{v} = 2xv + 2v(x - 2x^3) = 4xv(1 - x^2)$). Siis origo on satulapiste. Kumpikin tasapainokohdista $(\pm\sqrt{2}/2, 0)$ on stabiili, sillä sitä riittävän lähelle tulevat radat kiertävät sulkeutuen sen ympäri etääntyen siitä mielivaltaisen vähän. Tarkemmin sanoen, seuraava määritelmän ehto systeemin tasapainokohdan (x_0, v_0) stabiiliudelle on voimassa: Kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, jolla on seuraava ominaisuus: Jos $t \mapsto (x(t), v(t))$ on ratkaisukäyrä, jolla $|(x(0), v(0)) - (x_0, v_0)| < \delta$, niin $|(x(t), v(t)) - (x_0, v_0)| < \varepsilon$ kaikilla $t \geq 0$.

5. On ratkaistava vakioiden variointia käyttäen alkuarvotehtävä $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = e^t \cos t$, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Vastaavan homogeeniyhtälön karakteristisen yhtälön $r^2 + 3r + 2 = (r + 2)(r + 1) = 0$ juuret ovat $r = -2$ ja $r = -1$. Täten homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu on $x_0(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t}$ $(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$. Määritetään nyt derivoituvat funktiot $C_1(\cdot)$ ja $C_2(\cdot)$ niin, että $x(t) = C_1(t)e^{-2t} + C_2(t)e^{-t}$ on täyden yhtälön yksittäinen ratkaisu. Ensiksikin

$$\dot{x}(t) = (\dot{C}_1 e^{-2t} + \dot{C}_2 e^{-t}) + (-2C_1 e^{-2t} - C_2 e^{-t}).$$

Vaaditaan (jottei tarvittaisi toisia derivaattoja $\ddot{C}_1$ ja $\ddot{C}_2$), että

$$\dot{C}_1 e^{-2t} + \dot{C}_2 e^{-t} = 0. \tag{1}$$

Tällöin

$$\ddot{x}(t) = (-2\dot{C}_1 e^{-2t} - \dot{C}_2 e^{-t}) + (4C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t}).$$

Vaaditaan, että

$$-2\dot{C}_1 e^{-2t} - \dot{C}_2 e^{-t} = e^t \cos t. \tag{2}$$

(Yhtälöt (1) ja (2) on helppo kirjoittaa suoraankin.) Tällöin x on täyden yhtälön ratkaisu, kuten tiedetään teorian perusteella ja nähdään myös suoraan sijoittamalla. Toimittamalla yhtälöille operaatiot (1)+(2) ja 2(1)+(2) puolittain saadaan, että

$$(1)\&(2) \iff \begin{cases} \dot{C}_1(-e^{-2t}) = e^t \cos t \\ \dot{C}_2 e^{-t} = e^t \cos t \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{C}_1 = -e^{3t} \cos t \\ \dot{C}_2 = e^{2t} \cos t \end{cases}.$$

(**Kaavoin sama:** Olkoon $y_1(t) = e^{-2t}$ ja $y_2(t) = e^{-t}$, jolloin $W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} e^{-2t} & e^{-t} \\ -2e^{-2t} & -e^{-t} \end{vmatrix} = e^{-2t}(-e^{-t}) - (-2e^{-2t})e^{-t} = -e^{-3t} + 2e^{-3t} = e^{-3t}$. Merkitään $g(t) = e^t \cos t$. Tällöin

$$\dot{C}_1(t) = -\frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)} = -\frac{e^{-t}e^t \cos t}{e^{-3t}} = -e^{3t} \cos t; \quad \dot{C}_2(t) = \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)} = \frac{e^{-2t}e^t \cos t}{e^{-3t}} = e^{2t} \cos t.)$$

Nyt kaksi osittaisintegrointia antaa

$$-C_1(t) = \int e^{3t} \cos t\, dt = \tfrac{1}{3}e^{3t} \cos t + \tfrac{1}{3} \int e^{3t} \sin t\, dt = \tfrac{1}{3}e^{3t} \cos t + \tfrac{1}{9}e^{3t} \sin t - \tfrac{1}{9} \int e^{3t} \cos t\, dt,$$

josta ratkaisemalla integraalin suhteen saadaan

$$-C_1(t) = \int e^{3t} \cos t\, dt = \tfrac{9}{10}(\tfrac{1}{3}e^{3t} \cos t + \tfrac{1}{9}e^{3t} \sin t) = \tfrac{3}{10}e^{3t} \cos t + \tfrac{1}{10}e^{3t} \sin t.$$

Samalla tavalla kaksi osittaisintegrointia antaa

$$C_2(t) = \int e^{2t}\cos t\,dt = \tfrac{1}{2}e^{2t}\cos t + \tfrac{1}{2}\int e^{2t}\sin t\,dt = \tfrac{1}{2}e^{2t}\cos t + \tfrac{1}{4}e^{2t}\sin t - \tfrac{1}{4}\int e^{2t}\cos t\,dt,$$

josta tulee ratkaisemalla integraalin suhteen, että

$$C_2(t) = \int e^{2t}\cos t\,dt = \tfrac{4}{5}\left(\tfrac{1}{2}e^{2t}\cos t + \tfrac{1}{4}e^{2t}\sin t\right) = \tfrac{2}{5}e^{2t}\cos t + \tfrac{1}{5}e^{2t}\sin t.$$

Näin ollen sijoittamalla $C_1(t)$ ja $C_2(t)$ ja sieventämällä saadaan yksittäisratkaisu

$$\begin{aligned} x^*(t) &= C_1(t)e^{-2t} + C_2(t)e^{-t} = -\left(\tfrac{3}{10}e^t\cos t + \tfrac{1}{10}e^t\sin t\right) + \left(\tfrac{2}{5}e^t\cos t + \tfrac{1}{5}e^t\sin t\right) \\ &= \tfrac{1}{10}e^t\cos t + \tfrac{1}{10}e^t\sin t. \end{aligned}$$

Yhtälön yleinen ratkaisu on siis

$$x(t) = x_0(t) + x^*(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-t} + \tfrac{1}{10}e^t(\cos t + \sin t) \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}),$$

ja tälle on

$$\dot{x}(t) = -2C_1e^{-2t} - C_2e^{-t} + \tfrac{2}{10}e^t\cos t.$$

Täten

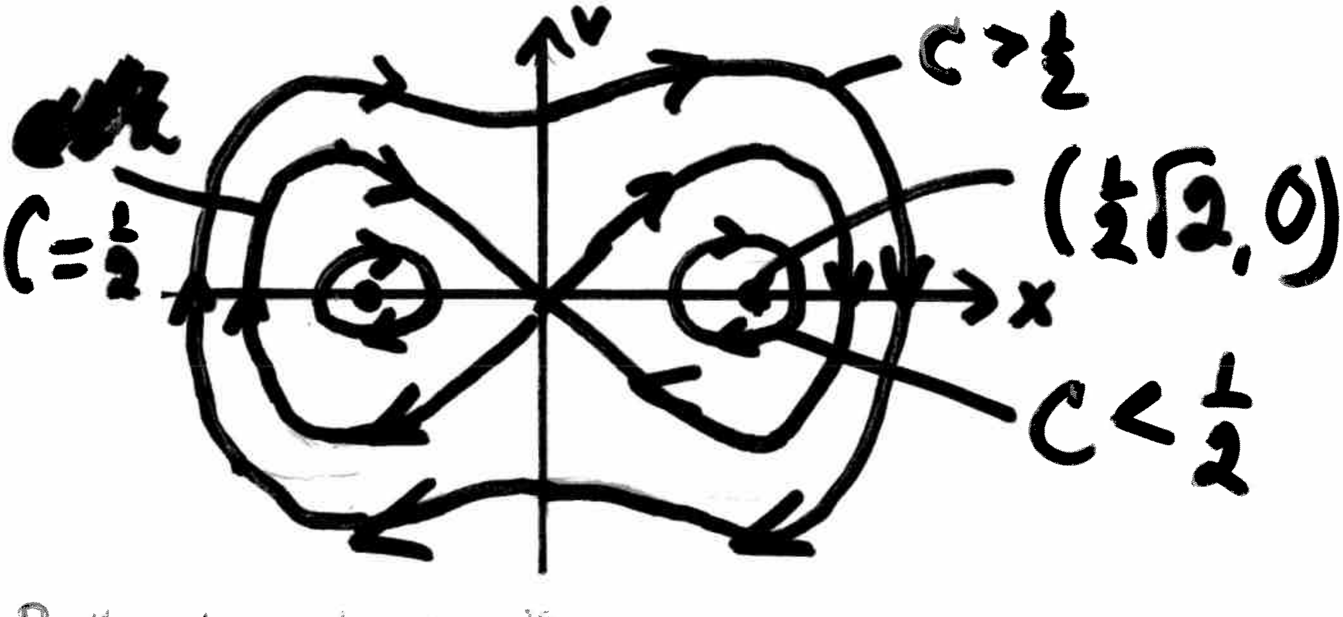
$$x(0) = \dot{x}(0) = 0 \iff \begin{cases} C_1 + C_2 + \frac{1}{10} & = 0 \\ -2C_1 - C_2 + \frac{2}{10} & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = \frac{3}{10} \\ C_2 = -\frac{4}{10} \end{cases}.$$

Näin ollen alkuarvotehtävän ratkaisu on

$$\underline{x(t) = \tfrac{1}{10}(3e^{-2t} - 4e^{-t} + e^t\cos t + e^t\sin t),} \quad \text{kun } t \in \mathbb{R}.$$

Huom. Perusjärjestelmästä nähdään, että epähomogeenisuustermi $e^t\cos t$ ei ole homogeeniyhtälön ratkaisu. Siksi yritteeksi olisi käynyt $x(t) = Ae^t\cos t + Be^t\sin t$ $(A, B \in \mathbb{R})$, jos olisi ollut tarkoitus käyttää yritettä.

Tehtävässä 4(d) piirrettäväksi pyydetty faasikuvio. Piirretään xv-tasoon ratkaisukäyrät ajankasvun suuntineen kolmessa eri tapauksessa: $C < \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{2}$ ja $C > \frac{1}{2}$. Piirrokset ovat käsivaraisia hahmotelmia.



Ratkaisut ovat selvästi rajoitettuja (sisältyvät johonkin kiekkoon)