Differentiaaliyhtälöt I, harjoitus 1, 9.–11.9.2008, ratkaisut (JL), 3 sivua

1. On tutkittava, mitkä seuraavista yhtälöistä ovat separoituvia. (Tässä $' = d/dx$.)

(a) $y' = y^3 + y$. Asetetaan $f(x,y) = y^3 + y \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $p(x) = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$ ja $q(y) = y^3 + y \ \forall y \in \mathbb{R}$; tällöin $f(x,y) = p(x)q(y) \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ eli yhtälö on muotoa $y' = p(x)q(y)$. Siis yhtälö *on separoituva* (tasossa $\mathbb{R}^2$).

(b) $y' = e^{x+4y}$. Koska $e^{x+4y} = e^x e^{4y} \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, yhtälö *on separoituva.*

(c) $y' = \sin(x+y)$. Yhtälö *ei välttämättä ole separoituva*, sillä $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ ei ilmeisestikään ole muotoa $p(x)q(y)$ suorakaiteessa $I \times J$ millään ei-tyhjillä avoimilla väleillä $I, J \subset \mathbb{R}$ ja funktioilla $p\colon I \to \mathbb{R}$ ja $q\colon J \to \mathbb{R}$. Itse asiassa voidaan osoittaa, että yhtälö ei todellakaan ole separoituva missään kyseisenlaisessa suorakaiteessa (tapaus $I = J = \mathbb{R}$ on alempana), mutta on parempi tyytyä ylläolevaan huomioon ja (jatkossa) keskittää heti ponnistukset yhtälön ratkaisemiseksi jollain muulla tavalla. (Tällainen tapa heti löytyykin: sijoituksen $v(x) = x + y(x) \Leftrightarrow y(x) = v(x) - x$ kautta yhtälö on yhtäpitävä yhtälön $v' = 1 + \sin v$ kanssa, ja jälkimmäinen yhtälö on separoituva!)

Tapauksen $I = J = \mathbb{R}$ todistus epäsuorasti: Koska $1 = \sin \frac{1}{2}\pi = \sin(0 + \frac{1}{2}\pi) = p(0)q(\frac{1}{2})$, niin $p(0) \neq 0$, ja samoin $q(0) \neq 0$; mutta tällöin $0 = \sin 0 = \sin(0+0) = p(0)q(0) \neq 0$; RR.

2. Seuraavien yhtälöiden yleiset ratkaisut on määritettävä muuttujat erottamalla.

(a) $1 + y^2 + xyy' = 0$. Yhtälössä ei voi olla $x = 0$ eikä myöskään $y = 0$. Avoimissa puolitasoissa $x \lessgtr 0$ yhtälö on yhtäpitävä separoituvan yhtälön $y' = -(1+y^2)/xy$ kanssa, ja yleinen ratkaisu saadaan integroimalla:

$$\Leftrightarrow \frac{yy'}{1+y^2} = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow \int \frac{2y}{1+y^2}\,dy = -2\int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln(1+y^2) = -2\ln|x| + C_0 \quad (C_0 \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \underline{1 + y^2 = \frac{C}{x^2}} \quad (C = e^{C_0} > 0) \Leftrightarrow y(x) = \pm\sqrt{\frac{C}{x^2} - 1}, \quad \text{kun } 0 < |x| < \sqrt{C} \ (C > 0).$$

Siis kullakin $C > 0$ saadaan neljä eri ratkaisua sen mukaan, mikä on ratkaisun (maksimaalinen) määrittelyväli, $]-\sqrt{C}, 0[$ vai $]0, \sqrt{C}[$, ja merkki.

(b) $(1-x^2)y' = 1 - y^2$. Yhtälöä vastaava normaalimuotoinen yhtälö $y' = (1-y^2)/(1-x^2)$ on separoituva niissä kolmessa alueessa, jotka tasosta jäävät, kun poistetaan suorat $x = \pm 1$. Koska $1 - y^2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$, yhtälöllä on triviaaliratkaisut $\underline{y(x) = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}}$ ja $\underline{y(x) = -1 \ \forall x \in \mathbb{R}}$. Muilla ratkaisuilla $y\colon \Delta \to \mathbb{R}$, joilla $\pm 1 \notin \Delta$, on (teorian perusteella) $y(x) \neq \pm 1 \ \forall x \in \Delta$, ja näille ratkaisuille pätee:

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{1-y^2} = \int \frac{dx}{1-x^2} \Leftrightarrow \int \frac{dy}{(1-y)(1+y)} = \int \frac{dx}{(1-x)(1+x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}\right) dy = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) dx \Leftrightarrow \ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C_0$$

$$\Leftrightarrow \underline{\frac{1+y}{1-y} = C\frac{1+x}{1-x}} \quad (C = \pm e^{C_0} \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \frac{C - 1 + (C+1)x}{C + 1 + (C-1)x}, \quad \text{kun } C \neq 0, 1 \text{ ja } x \neq -\frac{C+1}{C-1}, \quad \text{tai} \quad y(x) = x, \text{ kun } C = 1.$$

Huom. Ratkaisut pyritään aina määrittämään maksimaalisilla väleillä (väli: suoran *yhtenäinen* osajoukko; maksimaalinen väli: ratkaisua ei voi laajentaa ratkaisuksi suurempaan väliin). Yllä saaduissa ratkaisuissa voidaan väliaikainen rajoitus $x \neq \pm 1$ poistaa asettamalla $y(1) = 1$ ja $y(-1) = -1$ (tai vain toinen näistä, tai ei kumpaakaan, riippuen siitä, millä välillä y:tä alunperin tarkastellaan), sillä onhan tällöin y:n lauseke jatkuvasti derivoituva myös pisteissä $x = \pm 1$. Parvesta saataisiin esille triviaaliratkaisut $y(x) = \mp 1$ antamalla $C = 0$ tai $1/C \to 0$.

3. On määritettävä seuraavien yhtälöiden yleiset ratkaisut ja piirrettävä ratkaisukäyriä. (Kuvat sivulla 3.)

(a) $x^2y' = y^2$. Väleillä $x \lessgtr 0$ yhtälö on separoituva. Sillä on triviaaliratkaisu $\underline{y(x) = 0}$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Ratkaisut y väleillä, joilla ne eivät saa arvoa 0, saadaan separoimalla: $\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + C \Leftrightarrow \underline{y(x) = \frac{x}{1 - Cx}}$, kun $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ja $x \neq \frac{1}{C}$ (piste $x = 0$ sallitaan jälkikäteen), tai $\underline{y(x) = x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (tapaus $C = 0$).

Kuvaa varten: Huomataan, että ei-triviaalille ratkaisulle y on $y'(x) = 1/(1 - Cx)^2 > 0$, joten y on aidosti kasvava. Tapauksessa $C \neq 0$ on lisäksi $|y(x)| \to \infty$, kun $x \to 1/C$, sekä $y(x) \to -1/C$, kun $|x| \to \infty$.

(b) $y' = \sqrt{y - 3}$. Yhtälö on separoituva, ja sille saadaan triviaaliratkaisu $\underline{y(x) = 3}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ tavallisesta yhtälöstä $\sqrt{y - 3} = 0 \Leftrightarrow y = 3$. Ratkaisut $y\colon I \to \mathbb{R}$, joilla $y(x) > 3$ $\forall x \in I$, saadaan separoimalla: $\int \frac{dy}{\sqrt{y - 3}} = \int dx \Leftrightarrow 2\sqrt{y - 3} = x + C \Leftrightarrow \underline{y(x) = 3 + \left(\frac{x + C}{2}\right)^2}$ $(C \in \mathbb{R})$, kun $x > -C$, ja itse asiassa, kun $x \geq -C$, jolloin $y(-C) = 3$ ja $y'(-C) = 0$; <u>ratkaisu voidaan siis laajentaa koko $\mathbb{R}$:ään asettamalla $y(x) = 3$, kun $x \leq -C$.</u>

4. On ratkaistava seuraavat alkuarvotehtävät ($\dot{} = d/dt$).

(a) $\dot{x} = x^2$, $x(0) = 1$. Yhtälö on separoituva, ja sillä on $\mathbb{R}$:ssä triviaaliratkaisu $x(t) = 0$, joka ei kuitenkaan toteuta alkuehtoa. Muut ratkaisut: $\Leftrightarrow \int \frac{dx}{x^2} = \int dt \Leftrightarrow -\frac{1}{x} = t + C$. Tässä $x(0) = 1 \Leftrightarrow -1 = 0 + C \Leftrightarrow C = -1$. Siis alkuarvotehtävällä on yksikäsitteinen ratkaisu $\underline{x(t) = \frac{1}{1 - t}}$, kun $t < 1$. (Väli $t > 1$ ei käy, koska alkuehdon piste $t = 0$ ei kuulu siihen väliin.)

II tapa. Yhdistetään alkuehto integrointiin: $\int_1^x \frac{d\xi}{\xi^2} = \int_0^t d\eta \Leftrightarrow \Big/_{1}^{x} -\frac{1}{\xi} = \Big/_{0}^{t} \eta \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} = t \Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{1 - t}$, kun $t < 1$.

(b) $\dot{x} = tx$, $x(0) = 1$. Yhtälö on separoituva, ja sillä on $\mathbb{R}$:ssä triviaaliratkaisu $x(t) = 0$, joka ei kuitenkaan toteuta alkuehtoa. Muut ratkaisut: $\Leftrightarrow \int \frac{dx}{x} = \int t\,dt \Leftrightarrow \ln|x| = \frac{1}{2}t^2 + C$. Tässä $x(0) = 1 \Leftrightarrow 0 = 0 + C \Leftrightarrow C = 0$. Ratkaisuvälillä on alkuehdon tähden oltava $x(t) > 0$, joten alkuarvotehtävällä on yksikäsitteinen ratkaisu $\underline{x(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

5. Seuraavat differentiaaliyhtälöt on osoitettava eksakteiksi ja määritettävä niiden yleiset ratkaisut.

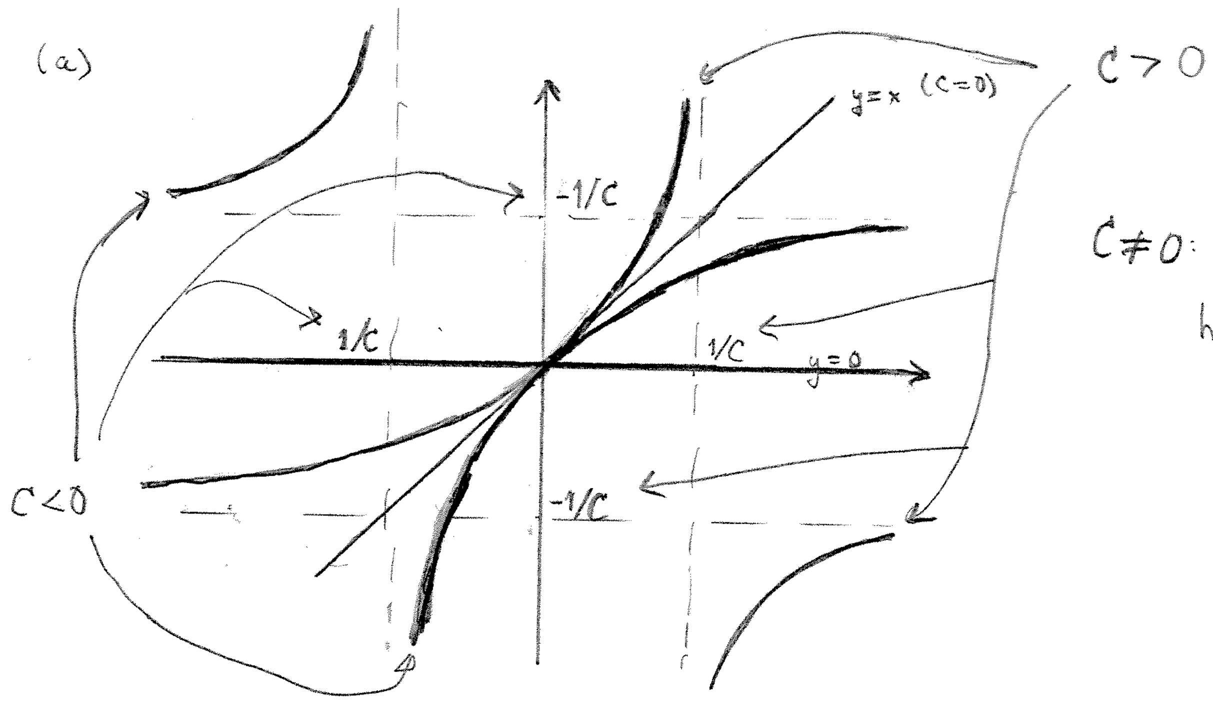
(a) $2xy + 3 + (x^2 - 1)y' = 0$. Määritellään $M(x, y) = 2xy + 3$ ja $N(x, y) = x^2 - 1$, jolloin $(\partial M/\partial y)(x, y) = 2x = (\partial N/\partial x)(x, y)$. Siis yhtälö on eksakti $\mathbb{R}^2$:ssa. Määritetään yhtälön integraalifunktio eli sellainen funktio $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, jolla $\partial F/\partial x = M$ ja $\partial F/\partial y = N$. Valitaan $x_0 = 0$. Tällöin

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_0^x M(t, y)\,dt + \int^y N(0, t)\,dt = \int_0^x (2ty + 3)\,dt + \int^y (-1)\,dt \\ &= (x^2y + 3x) + (-y + C_0) = x^2y + 3x - y \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

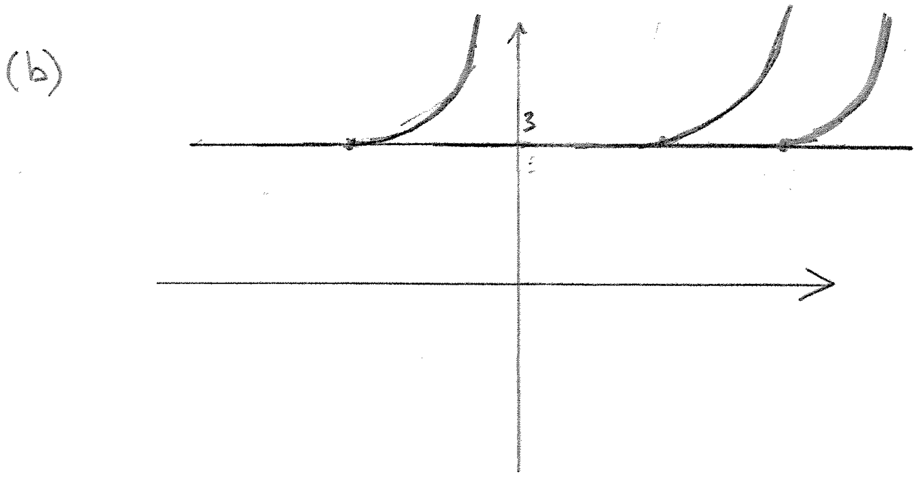
kun valitaan $C_0 = 0$. Nyt ratkaisukäyrät ovat F:n tasa-arvokäyrät $F(x, y) = C$ $(C \in \mathbb{R})$ $\Leftrightarrow \underline{x^2y + 3x - y = C}$ $\Leftrightarrow y(x) = \frac{C - 3x}{x^2 - 1}$, kun $C \neq \pm 3$ ja $x \neq \pm 1$, tai (tapaus $C = 3$) $y(x) = -\frac{3}{x + 1}$, kun $x \neq -1$, tai (tapaus $C = -3$) $y(x) = -\frac{3}{x - 1}$, kun $x \neq 1$.

(b) $e^{-y} + (1 - xe^{-y})y' = 0$. Koska $(\partial/\partial y)e^{-y} = -e^{-y} = (\partial/\partial x)(1 - xe^{-y})$, niin yhtälö on eksakti tasossa. Yhtälön integraalifunktiolle F on $F(x, y) = \int e^{-y}\,dx = xe^{-y} + \varphi(y)$ ja $1 - xe^{-y} = \partial F/\partial y = -xe^{-y} + \varphi'(y) \Leftrightarrow \varphi'(y) = 1 \Leftarrow \varphi(y) = y$, joten $F(x, y) = xe^{-y} + y$ käy. Siis yleinen ratkaisu on $\underline{xe^{-y} + y = C}$ $(C \in \mathbb{R})$. Tämä yhtälö voidaan ratkaista x:n suhteen: $x = (C - y)e^y$; ratkaisufunktiot saadaan tämän funktion aidosti monotonisten rajoittumien käänteisfunktioina ja ratkaisujen kuvaajat tämän kaavan avulla.

Tehtävän 3 kuvat.



C≠0: hyperbelin haaroja



Ei-triviaalin ratkaisun kuvaaja on puolisuora ja paraabelin puolikas.