Differentiaaliyhtälöt I, kurssikoe 14.10.2008, ratkaisut (J. Luukkainen), 3 sivua

Teht. 1. On ratkaistava alkuarvotehtävä $\dot{x}(t) = x^2 + 1$, $x(0) = 1$.

Ratk. Tässä $\dot{} = d/dt$, aikaderivaatta. Määritetään ensin differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu. Yhtälö on separoituva ja siinä on $x^2 + 1 > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joten

$$\dot{x} = x^2 + 1 \Leftrightarrow \int \frac{dx}{x^2+1} = \int dt \Leftrightarrow \arctan x = t + C \ (C \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow x = \tan(t + C) \text{ ja } |t + C| < \tfrac{1}{2}\pi \ (C \in \mathbb{R}).$$

Tutkitaan sitten alkuehdon $x(0) = 1$ eli $(t, x) = (0, 1)$ toteutumista:

$$x(0) = 1 \Leftrightarrow \tan C = \tan(0 + C) = 1 \text{ ja } |C| < \tfrac{1}{2}\pi \ \Leftrightarrow C = \tfrac{1}{4}\pi.$$

Alkuarvotehtävän ratkaisu on siis $\underline{x(t) = \tan\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)}$, kun $-\frac{1}{2}\pi < t + \frac{1}{4}\pi < \frac{1}{2}\pi$ eli $\underline{\text{kun } -\frac{3}{4}\pi < t < \frac{1}{4}\pi}$.

Huom. 1) Alkuehdon voi ottaa huomioon jo aiemmassakin vaiheessa: $C = 0 + C = \arctan 1 = \frac{1}{4}\pi$.
2) Koska $\lim_{t \to \pi/4-} x(t) = \infty$ ja $\lim_{t \to -3\pi/4+} x(t) = -\infty$, ratkaisua x ei voi laajentaa suuremmalle välille.
3) Ratkaisulle saa myös esityksen $x(t) = \dfrac{\tan t + \tan \frac{1}{4}\pi}{1 - \tan t \tan \frac{1}{4}\pi} = \dfrac{1 + \tan t}{1 - \tan t}$, kun $-\frac{3}{4}\pi < t < \frac{1}{4}\pi$ ja $t \neq -\frac{1}{2}\pi$, sekä $x\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = -1$.

Arvostelusta. Kustakin seuraavasta seikasta tuli piste: Muuttujien erottamisesta; impliittimuodosta $\arctan x = t + C$; vakiosta $C = \frac{1}{4}\pi$; ratkaisuvälistä $\left]-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi\right[$.

Teht. 2. On määritettävä yhtälön $\ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t) + x(t) = e^t$ yleinen ratkaisu.

Ratk. (Vrt. harjoitustehtävä 4:2c.) Yhtälö on lineaarinen. Vastaava homogeeninen yhtälö $\ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t) + x(t) = 0$ on vakiokertoiminen, ja sen karakteristisella yhtälöllä $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0$ on kaksoisjuuri $r = 1$, joten yhtälöllä on ratkaisujen $x_1(t) = e^t$ ja $x_2(t) = te^t$ muodostama perusjärjestelmä sekä yleinen ratkaisu $x_0 = C_1x_1 + C_2x_2$ $(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$.

Täydelle epähomogeeniselle yhtälölle voidaan löytää yksittäisratkaisu v kahdellakin eri tavalla:

Tapa 1: Määritettävien vakiokerrointen menetelmä. Koska epähomogeenisuustermi $g(t) = e^t$ ja myös $tg(t) = te^t$ kuuluvat perusjärjestelmäämme ja ovat siis homogeenisen yhtälön ratkaisuja, on järkevää tehdä yrite $v(t) = At^2e^t$ $(A \in \mathbb{R})$. Sijoittamalla saadaan vaatimus

$$e^t = v(t) - 2\dot{v}(t) + \ddot{v}(t) = At^2e^t - 2A(t^2+2t)e^t + A(t^2+4t+2)e^t = A(t^2-2t^2-4t+t^2+4t+2)e^t = 2Ae^t \Leftrightarrow A = \tfrac{1}{2}.$$

Siis $v(t) = \frac{1}{2}t^2e^t$ on ratkaisu.

Tapa 2: Varioitavien vakioiden menetelmä. Määritetään derivoituvat funktiot C_1, C_2 niin, että $v = C_1x_1 + C_2x_2$ on ratkaisu. Yhtäpitävä ehto on

$$\begin{cases} \dot{C}_1x_1 + \dot{C}_2x_2 = 0 \\ \dot{C}_1\dot{x}_1 + \dot{C}_2\dot{x}_2 = g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{C}_1(t)e^t + \dot{C}_2(t)te^t = 0 \\ \dot{C}_1(t)e^t + \dot{C}_2(t)(t+1)e^t = e^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{C}_1(t) + \dot{C}_2(t)t = 0 \\ \dot{C}_1(t) + \dot{C}_2(t)(t+1) = 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{C}_1(t) = -t\dot{C}_2(t) \\ \dot{C}_2(t) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{C}_1(t) = -t \\ \dot{C}_2(t) = 1 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} C_1(t) = -\frac{1}{2}t^2 \\ C_2(t) = t \end{cases}.$$

Siis $v(t) = -\frac{1}{2}t^2e^t + t \cdot te^t = \frac{1}{2}t^2e^t$, eli sama kuin yllä.
Yleinen ratkaisu on täten $x(t) = x_0(t) + v(t) = \underline{C_1e^t + C_2te^t + \frac{1}{2}t^2e^t}$, kun $t \in \mathbb{R}$ $(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$.

Arvostelusta. Kummastakin seuraavasta seikasta tuli piste: KY:n kaksoisjuuri $r = 1$; HY:n perusjärjestelmä.

Teht. 3. On määritettävä Bernoullin yhtälön $y'(x) + 2xy(x) + xy(x)^4 = 0$ yleinen ratkaisu.

Ratk. (Harjoitustehtävä 2:7.) Kirjoitetaan yhtälö muotoon $y'(x) + 2xy(x) = -xy(x)^4$. Huomataan, että $\underline{y(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}}$ on triviaaliratkaisu. Etsitään ratkaisut y, jotka eivät saa arvoa 0, jakamalla yhtälö puolittain

$y(x)$:llä: $y(x)^{-4}y'(x) + 2xy(x)^{-3} = -x$. Sijoittamalla $v(x) = y(x)^{-3}$, jolloin $v'(x) = -3y(x)^{-4}y'(x)$, tästä saadaan yhtäpitävä lineaarinen yhtälö $-\frac{1}{3}v'(x) + 2xv(x) = -x \Leftrightarrow v'(x) - 6xv(x) = 3x$. Tällä on integroiva tekijä $\mu(x) = \exp\left(\int(-6x)\,dx\right) = e^{-3x^2}$. Tällä puolittain kertomalla saadaan yhtälö ratkaistuksi:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-3x^2}v(x)\right) = e^{-3x^2}v'(x) - 6xe^{-3x^2}v(x) = 3xe^{-3x^2} \Leftrightarrow e^{-3x^2}v(x) = \int 3xe^{-3x^2}\,dx = -\tfrac{1}{2}e^{-3x^2} + C$$
$$\Leftrightarrow v(x) = Ce^{3x^2} - \tfrac{1}{2} \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Koska $y(x) = v(x)^{-1/3}$, saadaan siis ratkaisu

$$\underline{y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{Ce^{3x^2} - \frac{1}{2}}}} \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Määritetään vielä **(maksimaalinen) ratkaisuväli** kullakin C:n arvolla. Jos $C \le 0$, niin $Ce^{3x^2} - \frac{1}{2} \le 0 - \frac{1}{2} < 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, joten ratkaisuväli on $\mathbb{R}$. (Voi huomata, että $C = 0$ antaa toisenkin vakiofunktioratkaisun, $y(x) = -\sqrt[3]{2}\ \forall x \in \mathbb{R}$.) Jos taas $C > \frac{1}{2}$, niin $Ce^{3x^2} - \frac{1}{2} \ge C - \frac{1}{2} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, joten jälleen ratkaisuväli on $\mathbb{R}$. Jos vihdoin $0 < C \le \frac{1}{2}$, niin $Ce^{3x^2} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow e^{3x^2} = 1/2C \ge 1 \Leftrightarrow x = \pm x_0$, jossa $x_0 = \sqrt{\frac{1}{3}\ln(1/2C)}$; koska yllä saadulle $y(x)$:n lausekkeelle on $|y(x)| \to \infty$, kun $x \to \pm x_0$, niin ratkaisuvälit ovat $]-\infty, -x_0[$, $]-x_0, x_0[$ (paitsi jos $x_0 = 0$ eli jos $C = 1/2$) ja $]x_0, \infty[$.

Vaihtoehtoisesti v:lle saadun lineaarisen yhtälön voi ratkaista separoituvana yhtälönä $v' = 3x(1 + 2v)$; tällöin triviaaliratkaisu $v \equiv -1/2$ on tarkasteltava erikseen, vaikka sen voikin lopuksi upottaa v:n lausekkeeseen arvolla $C = 0$. Muitakin ratkaisutapoja (joissa ei kukaan onnistunut loppuun asti) on, kuten separoituvan yhtälön $y' = -x(2y + y^4)$ ratkaiseminen suoraan, jolloin on hyvä huomata, että $1/(2y + y^4) = (1/6)\big(3/y - 3y^2/(y^3 + 2)\big)$.

Arvostelusta. Triviaaliratkaisun $y \equiv 0$ unohtaminen vei pisteen, samoin vaihtoehtoisessa ratkaisutavassa triviaaliratkaisun $v \equiv -1/2$ unohtaminen. Ratkaisuvälien määrittämistä ei kukaan osannut täydelleen; ratkaisuvälit jätettiinkin arvostelun ulkopuolelle.

Teht. 4. Tarkastellaan SIR-mallia $\dfrac{dS}{dt} = -\beta SI$, $\dfrac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I$, $\dfrac{dR}{dt} = \alpha I$ joukossa $S \ge 0$, $I \ge 0$, $R \ge 0$. Tässä $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

(a) On osoitettava, että $N = S + I + R$ on vakio.

(b) On osoitettava, että jos $R_0 = \dfrac{\beta N}{\alpha} > 1$, niin raja-arvo $s_\infty = \lim_{t\to\infty} \dfrac{S(t)}{N}$ on olemassa ja toteuttaa yhtälön

$$(*) \qquad s_\infty = 1 + \frac{1}{R_0}\ln s_\infty.$$

Ratk. (a) (1 piste) $\dfrac{dN}{dt} = \dfrac{dS}{dt} + \dfrac{dI}{dt} + \dfrac{dR}{dt} = (-\beta SI) + (\beta SI - \alpha I) + \alpha I = 0\ \forall t \ge 0$. Siten N on vakio.

(b) Aluksi perinpohjainen tarkastelu, jota ei kokeessa vaadittu. Normeeratuille suureille $s = S/N$, $i = I/N$ ja $r = R/N$ (oletettu $N > 0$) saadaan yhtälöt

$$(**) \qquad \frac{ds}{dt} = -\beta Nsi, \quad \frac{di}{dt} = \beta Nsi - \alpha i \quad \text{ja} \quad \frac{dr}{dt} = \alpha i.$$

Pätee $s, i, r \ge 0$ ja $s + i + r = 1$, mutta tutkitaan ensin yhtälöryhmää (**) ilman näitä rajoitteita. Koska funktiot $(t, s, i, r) \mapsto -\beta Nsi$, $(t, s, i, r) \mapsto \beta Nsi - \alpha i$ ja $(t, s, i, r) \mapsto \alpha i$ ovat jatkuvasti derivoituvia $\mathbb{R}^4$:ssä, niin alkuarvotehtävän ratkaisun olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen [Martio–Sarvas, *Tavalliset differentiaaliyhtälöt*, Lause VII.3.3 ja Lauseen II.7.22 analogia] (tai [Walter, *Ordinary differential equations*, Springer 1998, Existence and Uniqueness Theorem (s. 108)]) mukaan kullakin $(t_0, s_0, i_0, r_0) \in \mathbb{R}^4$ on tutkittavan differentiaaliyhtälöryhmän (**) alkuarvotehtävällä $(s, i, r)(t_0) = (s_0, i_0, t_0)$ olemassa yksikäsitteinen ratkaisu

$(s,i,r)\colon \Delta \to \mathbb{R}^3$ maksimaalisella välillä $\Delta =]a,b[$ $(-\infty \le a < t_0 < b \le \infty)$, ja $|(t,s(t),i(t),r(t))| \to \infty$, kun $t \to a+$ tai $t \to b-$, eli ratkaisun kuvaaja jättää jokaisen $\mathbb{R}^4$:n kompaktin osajoukon Δ:n päätepisteitä lähestyttäessä. Huomataan, että jos $s_0 = 0$, niin ratkaisu on $(s,i,t)(t) = (0, i_0 e^{-\alpha(t-t_0)}, r_0 + i_0 - i_0 e^{-\alpha(t-t_0)})$ $\forall t \in \mathbb{R}$, joten jos ratkaisussa (s,i,r) on s:llä 0-kohta, niin $s \equiv 0$; nyt $s_\infty = \lim_{t\to\infty} s(t) = 0$ on olemassa, mutta *ei toteuta yhtälöä* (*). Huomataan edelleen, että jos $i_0 = 0$, niin ratkaisu on $(s,i,t)(t) = (s_0, 0, r_0)$ $\forall t \in \mathbb{R}$, joten jos ratkaisussa (s,i,r) on i:llä 0-kohta, niin $i \equiv 0$ ja s sekä r ovat vakioita; nyt $s_\infty = \lim_{t\to\infty} s(t) = s_0$ on olemassa, mutta *ei yleensä toteuta yhtälöä* (*). Oletetaan nyt, että $s_0 > 0$ ja $i_0 > 0$. Tällöin ylläolevan perusteella on $s(t) > 0$ ja $i(t) > 0$ $\forall t \in \Delta$. Koska $ds/dt = -\beta N si < 0$ välillä Δ, on s aidosti vähenevä, ja on siis olemassa $s_\infty = \lim_{t\to b-} s(t) \ge 0$. Oletetaan lisäksi, että $r_0 \ge 0$ ja että $s_0 + i_0 + r_0 = 1$, jolloin $s + i + r = 1$ välillä Δ. Oletetaan myös, että $t_0 = 0$. Koska $dr/dt = \alpha i > 0$, on r kasvava välillä Δ; tällöin $r_0 \le r(t) = 1 - s(t) - i(t) < 1$, kun $0 \le t < b$, ja on siis olemassa $r_\infty = \lim_{t\to b-} r(t) \le 1$. Silloin on olemassa myös $i_\infty = \lim_{t\to b-} i(t) = 1 - s_\infty - r_\infty \in [0,1]$. Koska nyt $0 \le s,i,r \le 1$ välillä $[0,b[$, niin ylläolevan nojalla täytyy olla $b = \infty$ (harjoitustehtävän 3:4 ratkaisussani jouduin olettamaan ehdon $b = \infty$; nyt sain sen todistettua). (Saattaa silti olla $a > -\infty$.) Tällöin $i_\infty = 0$, sillä muutoin olisi $\lim_{t\to\infty}(dr/dt)(t) = \alpha i_\infty > 0$, josta väliarvolauseen avulla saataisiin, että $r_\infty = \infty$, mikä on ristiriita.

Epäyhtälön $ds/dt = -\beta N si < 0$ perusteella funktio s määrittelee aidosti vähenevän bijektion $[0,\infty[\to]s_\infty, s_0]$, jolla on derivoituva käänteiskuvaus $s \mapsto t(s)$ derivaattanaan $dt/ds = 1/(ds/dt)$. Yhdistetyllä funktiolla $s \mapsto t \mapsto i$, jota merkitään edelleen i:llä, on tällöin ketjusäännön mukaan derivaatta

$$(***) \qquad \frac{di}{ds} = \frac{di}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{di/dt}{ds/dt} = \frac{\beta N si - \alpha i}{-\beta N si} = -1 + \frac{\alpha}{\beta N s} = \frac{1}{R_0}\frac{1}{s} - 1.$$

Siis $i = i_0 + \int_{s_0}^{s} \big(1/(R_0\sigma) - 1\big)\, d\sigma = i_0 + (1/R_0)\ln(s/s_0) - (s - s_0) = 1 - r_0 + (1/R_0)\ln(s/s_0) - s$, koska $i_0 + s_0 = 1 - r_0$. Rajalla $s \to s_\infty$, jolloin $i \to i_\infty = 0$, tästä saadaan $0 = 1 - r_0 + (1/R_0)\ln(s_\infty/s_0) - s_\infty$ eli

$$s_\infty = \big(1 - r_0 + (1/R_0)\ln(1/s_0)\big) + (1/R_0)\ln s_\infty.$$

Tehdään lisäoletus, että $r_0 = 0$ (tai ainakin, että $r_0 \approx 0$) ja että $i_0 \approx 0$ (vaikkakin edelleen $i_0 > 0$), jolloin myös $s_0 \approx 1$ ja siis $\ln(1/s_0) \approx 0$. Jos nyt $R_0 > 1$, niin $(1/R_0)\ln(1/s_0) \approx 0$. Siis ainakin tällöin s_∞ toteuttaa yhtälön (*) *approksimatiivisesti.*

Yhtälöllä (*) on aina ratkaisu $s_\infty = 1$, jolloin $(s,i,r) \equiv (1,0,0)$. Tutkitaan eri R_0:n arvoilla, onko yhtälöllä $s = 1 + (1/R_0)\ln s$, $s > 0$, muita ratkaisuja kuin ratkaisu $s = 1$. Määritellään $f(s) = 1 + (1/R_0)\ln s - s$ $\forall s > 0$, jolloin siis $f(1) = 0$. Nyt $f'(s) = 1/(R_0 s) - 1$ $\forall s > 0$, joten $f'(s) > 0$, kun $0 < s < 1/R_0$, ja $f'(s) < 0$, kun $s > 1/R_0$. Edelleen $f(s) \to -\infty$, kun $s \to 0+$ tai kun $s \to \infty$, joten f:llä on tasan yksi nollakohta, jos $R_0 = 1$, mutta muuten tasan kaksi nollakohtaa. Jos $R_0 < 1$, niin f:n nollakohdalle $s \ne 1$ pätee $s > 1/R_0 > 1$. Jos $R_0 > 1$, niin f:n nollakohdalle $s \ne 1$ pätee $0 < s < 1/R_0 < 1$.

Mielenkiintoiseen yhtälöön (*) *ja sen ratkaisuun* $0 < s_\infty < 1/R_0 < 1$ *päätymiseksi tarvittiin siis "kontaktiluvusta"* R_0 *oletus, että* $R_0 > 1$*, ja lisäksi oletukset, että* i_0 *on merkityksettömän pieni mutta positiivinen luku ja että* r_0 *on nolla tai muuten merkityksettömän pieni, jotta* $0 < s_0 < 1$ *ja* $s_0 \approx 1$.

Nyt kokeessa vaadittu ratkaisu. Tarkastellaan ryhmän (**) (yksikäsitteistä) ratkaisua $s\colon \Delta \to]0,1]$, $i\colon \Delta \to]0,1]$ ja $r\colon \Delta \to [0,1[$ välillä $\Delta = [0,\infty[$ niin, että $s + i + r = 1$.

Raja-arvon olemassaolo (2 pistettä). Koska $ds/dt = -\beta N si < 0$, niin s on (aidosti) vähenevä (ja alhaalta rajoitettu), joten on olemassa raja-arvo $s_\infty = \lim_{t\to\infty} s(t) \ge 0$. **Huom.** Tätä oli osattu suhteellisen vähän, joten 2 pistettä oli paikallaan. Tätä kohtaa olisi myös tarvittu, jotta aika t voitaisiin ilmoittaa s:n avulla ja siis i ilmoittaa s:n derivoituvana funktiona. Tätä *ajan eliminointia* eli yhtälön $di/ds = (di/dt)/(ds/dt)$ johtamista kohdassa (***) ei kuitenkaan ollut perustellut kukaan, eikä perustelua vaadittu.

Yhtälön johtaminen (3 pistettä). Esitetään di/ds:lle yhtälö (***) ja integroidaan se. Oletetaan luentojen tapaan, että $i_0 \approx 0$, $r_0 = 0$ ja $s_0 \approx 1$, jolloin saadaan $i = 1 + (1/R_0)\ln s - s$. Oletetaan luennoista tunnetuksi, että on olemassa raja-arvo $i_\infty = \lim_{t\to\infty} i(t) = 0$. Oletetaan tiedetyksi, että on olemassa myös raja-arvo $s_\infty = \lim_{t\to\infty} s(t) \ge 0$. Tällöin (*) seuraa. **Huom.** Oletusta $R_0 > 1$ tarvitaan, jotta termi $-(1/R_0)\ln s_0 = -(1/R_0)\ln(1 - i_0) \approx (1/R_0)i_0$ voidaan jättää pois ja saadulla yhtälöllä (*) on silti ratkaisu $0 < s_\infty < 1$; tätä ei kokeessa vaadittu.