Differentiaaliyhtälöt I

4. harjoitus, syksy 2008

1. Etsi seuraavien differentiaaliyhtälöiden yleiset ratkaisut.

   (a) $\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 0$,
   (b) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$,
   (c) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 10x = 0$.

2. Ratkaise seuraavat alkuarvotehtävät.

   (a) $\ddot{x} + \dot{x} + x = t, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$,
   (b) $\ddot{x} + 4x = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1$,
   (c) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = e^{-t}, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 1$.

3. Luennolla on osoitettu, että harmonisen oskillaattorin yhtälön

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

   yleinen ratkaisu on $x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$, missä C_1 ja C_2 ovat mielivaltaisia arvoja saavia vakioita. Osoita, että yleinen ratkaisu voidaan vaihtoehtoisesti kirjoittaa muotoon $x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$

   (a) sijoittamalla $x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$ yhtälöön;
   (b) käyttämällä kaavaa $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$.

   Esitä *amplitudi* A ja *vaihe-ero* δ integroimisvakioiden C_1 ja C_2 funktioina.

4. Tarkastellaan yhtälöä

$$\ddot{x} + 2x^3 - x = 0.$$

   (a) Kirjoita yhtälö ensimmäisen kertaluvun systeeminä muuttujille x ja $v := \dot{x}$.
   (b) Määritä systeemin tasapainokohdat.
   (c) Johda differentiaaliyhtälö $v(x)$:lle ja ratkaise se.
   (d) Piirrä faasikuvio (ts. piirrä ratkaisukäyrät xv-tasosssa ja osoita nuolella kunkin käyrän suunta).
   (e) Päättele faasikuviosta, että kaikki ratkaisut ovat rajoitettuja, että origo on satulapiste ja että muut tasapinokohdat ovat stabiileja.

5. Ratkaise vakioiden varioimiskeinoa käyttäen alkuarvotehtävä

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = e^t \cos t, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$$