

Differentiaaliyhtälöt I

2. harjoitus, syksy 2008

1. Osoita, että jos

$$\frac{1}{M(x, y)} \left(\frac{\partial}{\partial y} M(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} N(x, y) \right)$$

on pelkästään y :n funktio, niin yhtälöllä

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0$$

on muotoa $\mu(y)$ oleva integroiva tekijä.

2. Ratkaise edellisen tehtävän tuloksen nojalla yhtälö

$$y + (2y^3 - x)y' = 0.$$

3. Etsi seuraavien yhtälöiden yleiset ratkaisut (Tässä $' = \frac{d}{dx}$):

(a) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$,

(b) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$,

(c) $y' \sin x - y = 1 - \cos x$.

4. Ratkaise seuraavat alkuarvotehtävät.

(a) $xy' + 2y = x^3$; $y(1) = 1$,

(b) $y' + y \cos x = \sin x \cos x$; $y(0) = 1$.

5. Yhtälön

$$y' + P(x)y = (x + 1)^2 e^x$$

eräs ratkaisu on

$$y = (x^2 - 1)e^x.$$

Määritä yleinen ratkaisu.

6. Etsi yhtälön

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}$$

yleinen ratkaisu.

7. Ratkaise Bernoullin yhtälö

$$y' + 2xy + xy^4 = 0.$$