KORJATTU VERSIO: ii) oli väärin (JL to 25.9.2008 klo 14.45)

SELITYKSIÄ TEHTÄVÄÄN 4 / Differentiaaliyhtälöt I, harjoitus 4, 30.9.–2.9.2008
Levittäkää sanaa näistä selityksistä, joita ei kai ole ehditty luennoilla esittää!
(JL to 25.9.2008 klo 13.45)

4. Epälineaarinen yhtälö $\ddot{x} + 2x^3 - x = 0$.
(a) $v = \dot{x}$. Johdettava systeemi

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,v) \\ \dot{v} = g(x,v) \end{cases}$$

(siis *autonominen* systeemi siinä mielessä, että f ja g eivät riipu t:stä).
(b) *Tasapainokohdat*: Pisteet (x_0, v_0), joita vastaa triviaaliratkaisu $(x(t), v(t)) \equiv (x_0, v_0)$, eli f:n ja g:n yhteiset nollakohdat.
(c) Tasapainokohtien joukon ulkopuolella aika t eliminoidaan; ketjusäännöllä yhtälö

$$v'(x) = \frac{\dot{v}}{\dot{x}} = \frac{g(x,v)}{f(x.v)}$$

(ja täydennykseksi vastaava yhtälö $x'(v) = f(x,v)/g(x,v)$). Ratkaisuina *ratakäyrät*.
(d) On piirrettävä (hahmoteltava) *faasikuvio* eli ratakäyrät *faasiavaruudessa* eli xv-tasossa, ja merkittävä nuolin näkyviin kunkin käyrän suunta ajan t kasvaessa (tutkittava siis $\dot{x}$:n ja $\dot{v}$:n merkkejä).
(e) Määritelmät (**ehkä**) ovat

Tasapainokohta (x_0, v_0) on *satulapiste*, jos

i) jollekin radalle (x, v) on $(x(0), v(0)) \neq (x_0, v_0)$, mutta $(x(t), v(t)) \to (x_0, v_0)$, kun $t \to \infty$; ts. jokin pisteen (x_0, v_0) komplementista lähtevä ratakäyrä lähestyy rajatta pistettä (x_0, v_0) ajan kasvaessa rajatta;

ii) $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0$ s.e. löytyy rata (x, v), jolle $|(x(0), v(0)) - (x_0, v_0)| < \delta$, mutta $|(x(t), v(t)) - (x_0, v_0)| \geq \varepsilon$ jollain $t > 0$; ts. jollekin pisteen (x_0, v_0) kiekkoympäristölle pätee, että mielivaltaisen läheltä pistettä (x_0, v_0) lähtee ratakäyriä, jotka eivät pysy tässä kiekkoympäristössä.

Mutta satulapisteen ymmärtämiseksi riittää ajatella, mihin satulalle tippuva vesipisara valuu, jos se tippuu i) satulan pitkittäisleikkaukselle tai ii) satulan poikittaisleikkaukselle.

Tasapainokohta (x_0, v_0) on *stabiili*, jos $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ s.e. jos (x, v) on rata, jolla $|(x(0), v(0)) - (x_0, v_0)| < \delta$, niin $|(x(t), v(t)) - (x_0, v_0)| < \varepsilon$, kun $t \geq 0$. Ts. rata pysyy mielivaltaisen lähellä pistettä (x_0, v_0), kunhan se lähtee riittävän läheltä pistettä (x_0, v_0).