Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Harjoitus 4 (5.-9.10.2009)
Ratkaisuehdotuksia (Jr)

1. Koska luku 1 vektorissa $\vec{e}_i$ on komponentti numero i, niin suoraviivaisella laskulla saadaan

$$\vec{e}_i A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}.$$

Siis $\vec{e}_i A$ on matriisin A rivi numero i.

Toinen tapa: Koska $(\vec{e}_i A)^T = A^T \vec{e}_i^{\,T}$ on matriisin A^T sarake numero i (ks. Poolen kirjan lause 3.1 b. todistuksineen) eli matriisin A rivin numero i transpoosi, niin $\vec{e}_i A$ on matriisin A rivi numero i.

2. Olkoon matriisin B koko $m \times n$. Tällöin matriisin B^T koko on $n \times m$, joten matriisitulot BB^T ja B^TB ovat hyvin määriteltyjä, matriisin BB^T koko on $m \times m$ ja matriisin B^TB koko on $n \times n$. Transpoosin laskusäännöistä seuraa, että matriisit BB^T ja B^TB ovat symmetrisiä:

$$(BB^T)^T = (B^T)^T B^T = BB^T \text{ ja } (B^TB)^T = B^T(B^T)^T = B^TB.$$

3.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Laskuissa käytetään tuttuja sinin ja kosinin summakaavoja:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

a) Sinin ja kosinin summakaavojen avulla saadaan

$$
\begin{aligned}
A^2 = AA &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta & -\cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta & -\sin\theta\sin\theta + \cos\theta\cos\theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\theta+\theta) & -\sin(\theta+\theta) \\ \sin(\theta+\theta) & \cos(\theta+\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

b) Väite pätee tapauksessa $n = 1$, koska

$$
A^1 = A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 1\theta & -\sin 1\theta \\ \sin 1\theta & \cos 1\theta \end{bmatrix}.
$$

Olkoon sitten $n \geq 1$ mielivaltainen. Oletetaan (tämä on ns. induktio-oletus), että väite pätee tapauksessa n, toisin sanoen, että yhtälö

$$
A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}
$$

pätee. Todistetaan (tämä on ns. induktioaskel), että väite pätee nyt tapauksessa $n + 1$, toisin sanoen, että yhtälö

$$
A^{n+1} = \begin{bmatrix} \cos(n+1)\theta & -\sin(n+1)\theta \\ \sin(n+1)\theta & \cos(n+1)\theta \end{bmatrix}
$$

pätee. Tämä seuraa induktio-oletuksesta ja sinin ja kosinin summakaavoista seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
A^{n+1} = A^n A &= \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta & \cos n\theta(-\sin\theta) - \sin n\theta\cos\theta \\ \sin n\theta\cos\theta + \cos n\theta\sin\theta & \sin n\theta(-\sin\theta) + \cos n\theta\cos\theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(n\theta+\theta) & -\sin(n\theta+\theta) \\ \sin(n\theta+\theta) & \cos(n\theta+\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(n+1)\theta & -\sin(n+1)\theta \\ \sin(n+1)\theta & \cos(n+1)\theta \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

5. a) Matriisitulon laskusääntöä

$$
k(AB) = (kA)B = A(kB)
$$

käyttäen saadaan

$$\begin{aligned}(cA)\left(\frac{1}{c}A^{-1}\right) &= c\left(A\left(\frac{1}{c}A^{-1}\right)\right) = c\left(\frac{1}{c}\left(AA^{-1}\right)\right) \\ &= \left(c\,\frac{1}{c}\right)(AA^{-1}) = 1I = I,\end{aligned}$$

joten $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.

b) Koska

$$(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I^T = I,$$

on $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

6. a) Kanojen ja possujen päiden ja jalkojen lukumääristä saadaan lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{aligned} k + p &= 16 \\ 2k + 4p &= 38, \end{aligned}$$

joka matriisimuodossa $A\vec{x} = \vec{b}$ esitettynä on

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 38 \end{bmatrix}.$$

b) Käytetään Gaussin-Jordanin eliminointia:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] &\xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right] \\ &\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Käänteismatriisi A^{-1} on siis olemassa ja

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Toinen tapa: Jos kokoa 2×2 olevan matriisin

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

determinantille pätee $\det(A) = ad - bc \neq 0$, niin matriisilla A on käänteismatriisi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Koska tehtävän matriisille A pätee $\det(A) = 2 \neq 0$, sillä on käänteismatriisi

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

c) Lasketaan nyt $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$:

$$\begin{bmatrix} k \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 38 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Maatilalla on siis 13 kanaa ja 3 possua.