2. REAALIKERTOIMISET VEKTORIAVARUUDET

2.1 Koordinaattiavaruus $\mathbb{R}^n$

Olkoon $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ positiivinen kokonaisluku (luonnollisten lukujen joukko on tällä kurssilla $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$). Merkitään $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n\times 1} = n \times 1$-matriisien joukko. $\mathbb{R}^n$:n alkioita

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [\,x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n\,]^T \in \mathbb{R}^n, \quad x_i \in \mathbb{R} \text{ kaikilla } i,$$

kutsutaan *pisteiksi* tai (sarake-)*vektoreiksi*. Yllä olevaa alkiota $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ merkitään myös $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, järjestetty n-jono. Sen sijaan $\mathbf{x} \neq [\,x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n\,] \in \mathbb{R}^{1\times n}$, jos $n \geq 2$.

Näin on määritelty joukko $\mathbb{R}^n$, kun $n \geq 1$. Joskus merkitään lisäksi $\mathbb{R}^0 = \{\mathbf{0}\}$, yksialkioinen joukko.

Erikoistapauksena matriisien yhteenlaskusta 1.2.4 ja skalaarilla (= reaaliluvulla) kertomisesta 1.2.6 on $\mathbb{R}^n$:ssä (missä $n \geq 1$) määritelty yhteenlasku ja skalaarilla kertominen:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}; \qquad a \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \\ ax_n \end{bmatrix}$$

$(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, a \in \mathbb{R})$; nämä on siis määritelty ”komponenteittain”. Matriisitoimitusten ominaisuuksista saadaan seuraavat laskulait:

Lause 2.1.1. *Kaikilla* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ *ja* $a, b \in \mathbb{R}$ *on*

i) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$;

ii) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$;

iii) $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$, $\quad \mathbf{0} = [\,0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0\,]^T$;

iv) $\mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} = \mathbf{0}$;

v) $a(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = a\mathbf{x} + a\mathbf{y}$;
vi) $(a+b)\mathbf{x} = a\mathbf{x} + b\mathbf{x}$;
vii) $a(b\mathbf{x}) = (ab)\mathbf{x}$;
viii) $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$. $\square$

Painotekninen huomautus: Käsinkirjoitetussa tekstissä usein $\mathbf{x} = \overline{x}$ jne.

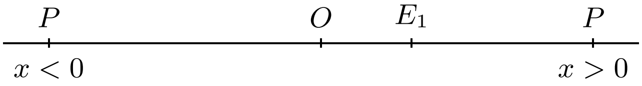
Geometrinen tulkinta tapauksissa $n = 1, 2, 3$.

$\underline{n=1}$: Joukkoina samastetaan yleensä $\mathbb{R}^1$ ja $\mathbb{R}$ niin, että

$$[\,x\,] \in \mathbb{R}^1 \text{ "} = \text{" } x \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

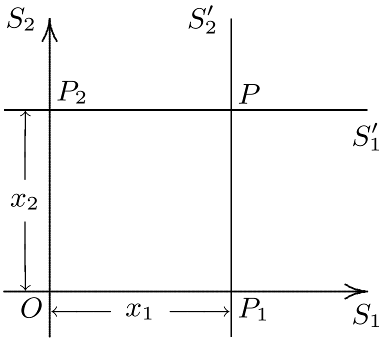
Tavalliseen tapaan reaaliluvut vastaavat lukusuoran pisteitä: Annetulta suoralta S valitaan piste O (origo) sekä toinen piste $E_1 \neq O$ (yksikköpiste). Pistettä $P \in S$ vastaa tämän jälkeen $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&|OP| : |OE_1| = |x| \qquad (|OP| = \text{janan } OP \text{ pituus})\\
&x > 0, \quad \text{jos pisteet } P \neq O \text{ ja } E_1 \text{ ovat } O\text{:n samalla puolella}\\
&x < 0, \quad \text{jos pisteet } P \neq O \text{ ja } E_1 \text{ ovat } O\text{:n eri puolilla.}
\end{aligned}$$



Mainittu vastaavuus on kääntäen yksikäsitteinen.

$\underline{n=2}$: Kiinnitetään tasossa T piste O (origo) ja O:n kautta kulkevat, toisiaan vastaan kohtisuorat suorat S_1 ja S_2 (koordinaattiakselit), sekä yksikköpisteet $E_i \in S_i$ $(i = 1, 2)$. Tämän jälkeen samastetaan S_i $\mathbb{R}$:n kanssa kuten yllä. Silloin jokaista pistettä $P \in T$ vastaa kääntäen yksikäsitteisesti piste $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:



$$\begin{aligned}
&S_i' \parallel S_i\\
&S_2' \cap S_1 = P_1 \;\leftrightarrow\; x_1 \in \mathbb{R}\\
&S_1' \cap S_2 = P_2 \;\leftrightarrow\; x_2 \in \mathbb{R}\\
&\;\Longrightarrow\; P \;\leftrightarrow\; \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

Yhteenlasku geometrisesti:

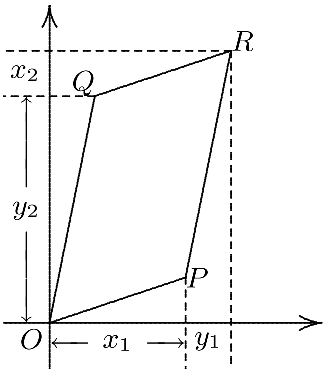
$P \in T \;\leftrightarrow\; \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$Q \in T \;\leftrightarrow\; \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$R \in T \;\leftrightarrow\; \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$

$\Longrightarrow$ R saadaan suunnikassäännöllä,

so. $OPRQ$ on suunnikas.



Skalaarilla kertominen geometrisesti:

$$P \in T \;\longleftrightarrow\; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad P \neq O \quad (\text{ts. } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}) \quad \text{ja}$$

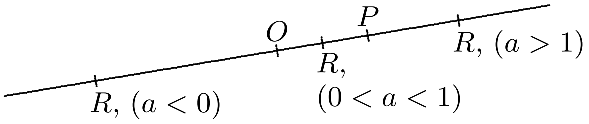
$$R \in T \;\longleftrightarrow\; a\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$$

$\Longrightarrow$ R on suoralla OP;

R ja P ovat O:n samalla puolella, kun $a > 0$

R ja P ovat O:n vastakkaisilla puolilla, kun $a < 0$

$|OR| : |OP| = |a|$.



<u>$n = 3$</u>: Kiinnitetään avaruudessa A origo O, kolme toisiaan vastaan kohtisuoraa koordinaattiakselia S_1, S_2 ja S_3, ja yksikköpisteet $E_i \in S_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Tämän jälkeen jokaista pistettä $P \in A$ vastaa kääntäen yksikäsitteisesti $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, summa $P + Q$ muodostetaan A:ssa suunnikassäännöllä (tasossa OPQ) ja skalaarilla kertominen tapahtuu kuten kohdassa $n = 2$.

Siis on saatu vastaavuudet

$$\text{tason pisteet} \;\longleftrightarrow\; \mathbb{R}^2\text{:n pisteet}$$

$$\text{avaruuden pisteet} \;\longleftrightarrow\; \mathbb{R}^3\text{:n pisteet}$$

Nämä riippuvat koordinaatiston (so. pisteiden 0, E_1, E_2, ...) valinnasta.

Tason tai avaruuden pisteparia P, Q vastaa vektori $\overrightarrow{PQ} = Q - P$.

Kahta eri pisteparia voi vastata sama vektori:

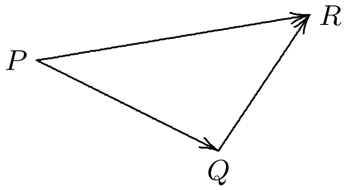
$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} \iff Q - P = S - R \iff P + S = Q + R$$

("vektori" = suuntajanojen ekvivalenssiluokka).
Erityisesti on olemassa yksikäsitteinen piste X, nimittäin $X = Q - P$, jolla $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OX}$ on pisteen X *paikkavektori*. Saadaan vastaavuus

$$\overrightarrow{PQ} \longleftrightarrow X \longleftrightarrow \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \text{ tai } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

tason (vast. avaruuden) vektorien ja $\mathbb{R}^2$:n (vast. $\mathbb{R}^3$:n) vektorien eli pisteiden välille.

Erityisesti $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$, joten $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$, ja yleisemmin $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ (koska $(Q - P) + (R - Q) = R - P$).



2.2 VEKTORIAVARUUDET

Edellä nähtiin, että $\mathbb{R}^n$:n vektorien yhteenlaskulla ja skalaarilla kertomisella on perusominaisuudet 2.1.1 i)–viii). Vastaavat ominaisuudet ovat voimassa monissa muissakin tilanteissa (esimerkkejä alla). Kannattaa siis ottaa käyttöön yleinen määritelmä, jossa ko. ominaisuudet asetetaan perusoletuksiksi (*aksioomiksi*); tällöin kehitettävä yleinen teoria soveltuu sellaisenaan jokaiseen erikoistapaukseen.

Määritelmä 2.2.1. Joukko V on ($\mathbb{R}$-kertoiminen) *vektoriavaruus*, jos kaikkiin $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in V$ ja $a \in \mathbb{R}$ on liitetty yksikäsitteiset summa $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in V$ ja tulo $a\mathbf{v} \in V$ niin, että seuraavat ominaisuudet ovat voimassa:

i) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ kaikilla $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.
ii) $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$ kaikilla $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.
iii) On olemassa sellainen $\mathbf{0} = \mathbf{0}_V$, että $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ kaikilla $\mathbf{v} \in V$.
iv) Jokaiseen $\mathbf{v} \in V$ liittyy sellainen $-\mathbf{v} \in V$, että $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.
v) $a(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a\mathbf{v} + a\mathbf{w}$ kaikilla $a \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.
vi) $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$ kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} \in V$.
vii) $a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$ kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} \in V$.
viii) $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$ kaikilla $\mathbf{v} \in V$.

Tässä V:n alkioita kutsutaan *vektoreiksi*, $\mathbb{R}$:n alkioita *skalaareiksi*.

Huomautus 2.2.2. a) laskutoimitukset $+$ ja $\cdot$ kuuluvat vektoriavaruuden struktuuriin. Tarkkaan ottaen vektoriavaruus ei siis ole pelkkä joukko V vaan kolmikko $(V, +, \cdot)$.

b) iii):ssä *nollavektori* $\mathbf{0}$ on yksikäsitteinen. Jos nimittäin myös $\mathbf{z} \in V$ toteuttaa ehdon $\mathbf{v} + \mathbf{z} = \mathbf{v}$ kaikilla $\mathbf{v} \in V$, niin

$$\mathbf{z} \overset{\text{iii}}{=} \mathbf{z} + \mathbf{0} \overset{\text{ii}}{=} \mathbf{0} + \mathbf{z} = \mathbf{0}.$$

c) iv):ssä vektorin $\mathbf{v}$ *vastavektori* $-\mathbf{v}$ on $\mathbf{v}$:n yksikäsitteisesti määräämä. Jos nimittäin myös $\mathbf{w}$ toteuttaa ehdon $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$, niin

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &\overset{\text{iii}}{=} \mathbf{w} + \mathbf{0} \overset{\text{iv}}{=} \mathbf{w} + (\mathbf{v} + (-\mathbf{v})) \overset{\text{i}}{=} (\mathbf{w} + \mathbf{v}) + (-\mathbf{v}) \\ &\overset{\text{ii}}{=} (\mathbf{v} + \mathbf{w}) + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0} + (-\mathbf{v}) \overset{\text{ii}}{=} (-\mathbf{v}) + \mathbf{0} \overset{\text{iii}}{=} (-\mathbf{v}).\end{aligned}$$

Esimerkki 2.2.3. a) 2.1.1:n mukaan sarakevektorien joukko $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n\times 1}$ $(n \geq 1)$ on vektoriavaruus, laskutoimituksina $n \times 1$-matriisien yhteenlasku ja skalaarilla kertominen. Vastaavasti tulee *rivivektorien* eli $1 \times n$-matriisien $[\,x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n\,]$ $(x_i \in \mathbb{R})$ joukosta $\mathbb{R}_n = \mathbb{R}^{1\times n}$ vektoriavaruus, kun laskutoimituksiksi valitaan $1 \times n$-matriisien yhteenlasku ja skalaarilla kertominen.

Yleisemmin on kaikkien $m \times n$-matriisien joukko $\mathbb{R}^{m\times n}$ $(m \geq 1,\, n \geq 1)$ matriisien yhteenlaskulla ja skalaarilla kertomisella varustettuna vektoriavaruus.

Myös $\mathbb{R}^0 = \{\mathbf{0}\}$ on vektoriavaruus, kun määritellään $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ ja $a \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ kaikilla $a \in \mathbb{R}$.

b) Olkoon $X \neq \emptyset$ joukko ja

$$\mathbb{R}^X = \{f \mid f \text{ on kuvaus } X \to \mathbb{R}\}$$

kaikkien X:ssä määriteltyjen reaalifunktioiden joukko. Kun $f, g \in \mathbb{R}^X$ ja $a \in \mathbb{R}$, määritellään $f + g \in \mathbb{R}^X$ ja $af \in \mathbb{R}^X$ (siis $f + g$ ja af ovat kuvauksia $X \to \mathbb{R}$) asettamalla

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (af)(x) &= a \cdot f(x)\end{aligned}$$

kaikilla $x \in X$, missä yhtälöiden oikealla puolella $+$ ja $\cdot$ tarkoittavat $\mathbb{R}$:n laskutoimituksia. Tällöin $\mathbb{R}^X$:stä tulee vektoriavaruus. Todistetaan esimerkiksi aksiooma i): Olkoot $f, g, h \in \mathbb{R}^X$ ja $x \in X$. Tällöin

$$\begin{aligned}((f + g) + h)(x) &= (f + g)(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) \\ &= f(x) + (g(x) + h(x)) = f(x) + (g + h)(x) = (f + (g + h))(x);\end{aligned}$$

koska siis $((f+g)+h)(x) = (f+(g+h))(x)$ kaikilla $x \in X$, on $(f+g)+h = f+(g+h)$ (määritelmän mukaan kaksi kuvausta $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ ovat samat täsmälleen silloin, kun $f_1(x) = f_2(x)$ kaikilla $x \in X$). $\mathbb{R}^X$:n nollavektori on nollakuvaus

$$\mathbf{0} : X \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{0}(x) = 0 \quad \text{kaikilla } x \in X.$$

Alkion $f \in \mathbb{R}^X$ vasta-alkio on

$$-f : X \to \mathbb{R}, \quad (-f)(x) = ((-1)f)(x) = (-1) \cdot f(x) = -f(x) \quad \text{kaikilla } x \in X.$$

(Lisäksi sovitaan, että $\mathbb{R}^\emptyset = \{\mathbf{0}\} = \mathbb{R}^0$.)

c) Useat $\mathbb{R}^X$:n osajoukot (sopivalla joukolla X) ovat kiintoisia vektoriavaruuksia; ks. 2.3.

Esimerkki 2.2.4. Kun $x, y, a \in \mathbb{R}$, määritellään $x \oplus y = x - y$, missä $-$ on tavallinen erotus, ja $a \odot x = a \cdot x$, missä $\cdot$ on tavallinen tulo. Mitkä aksioomista i) – viii) ovat voimassa $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$:ssä? Onko $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ vektoriavaruus?

Ratkaisu. i) ei ole voimassa; esimerkiksi

$$(0 \oplus 0) \oplus 1 = (0 - 0) - 1 = -1 \quad \text{ja} \quad 0 \oplus (0 \oplus 1) = 0 - (0 - 1) = 1,$$

joten $(0 \oplus 0) \oplus 1 \neq 0 \oplus (0 \oplus 1)$. Siten $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ ei ole vektoriavaruus.

ii) ei ole voimassa; esimerkiksi

$$0 \oplus 1 = 0 - 1 = -1 \neq 1 = 1 - 0 = 1 \oplus 0.$$

iii) on voimassa; $x \oplus 0 = x - 0 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. (Sen sijaan $0 \oplus x = -x \neq x$, kun $x \neq 0$).

iv) on voimassa; x kelpaa x:n vasta-alkioksi, koska $x \oplus x = x - x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

v) on voimassa; $a \odot (x \oplus y) = a(x - y) = ax - ay = (a \odot x) \oplus (a \odot y)$.

vi) ei ole voimassa; esimerkiksi

$$(1 + 1) \odot 1 = 2 \odot 1 = 2 \quad \text{ja} \quad (1 \odot 1) \oplus (1 \odot 1) = 1 - 1 = 0,$$

joten $(1 + 1) \odot 1 \neq (1 \odot 1) \oplus (1 \odot 1)$.

vii) ja viii) ovat voimassa. $\square$

Olkoon V vektoriavaruus. Silloin kahden vektorin $\mathbf{v}_1$ ja $\mathbf{v}_2$ summa on määritelty kaikilla $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$. Useamman vektorin summa määritellään rekursiivisesti: kun $n \geq 2$ ja $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$, on

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_n = (\mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_{n-1}) + \mathbf{v}_n.$$

Liitännäisyydestä 2.2.1 i) seuraa *yleinen liitännäisyys* eli sulut voi asettaa mielivaltaisesti. Tarkastellaan esimerkkinä tapausta $n = 4$. Rekursiivisen määritelmän mukaisesti

$$\text{(M)} \qquad \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 = ((\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_3) + \mathbf{v}_4.$$

Toisaalta sulut voidaan asettaa myös seuraavilla tavoilla:

$$\begin{array}{llll} 1) & (\mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)) + \mathbf{v}_4 & 2) & (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + (\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4) \\ 3) & \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_2 + (\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4)) & 4) & \mathbf{v}_1 + ((\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + \mathbf{v}_4) \end{array}$$

Koska $\mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_3$, summa 1) on sama kuin (M). Samalla tavalla päätellään, että summat 3) ja 4) ovat keskenään samat. Jos merkitään $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, on

$$((\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_3) + \mathbf{v}_4 = (\mathbf{v} + \mathbf{v}_3) + \mathbf{v}_4 = \mathbf{v} + (\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4) = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + (\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4),$$

joten summa 2) on sama kuin (M). Toisaalta, jos merkitään $\mathbf{u} = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, on

$$\mathbf{v}_1 + ((\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + \mathbf{v}_4) = \mathbf{v}_1 + (\mathbf{u} + \mathbf{v}_4) = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}) + \mathbf{v}_4 = (\mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)) + \mathbf{v}_4,$$

joten summat 4) ja 1) ovat keskenään samat. Siis kaikki neljä summaa ovat samat kuin (M). Näin ollen merkinnän $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$ voidaan ajatella tarkoittavan juuri sitä, että sulut voidaan asettaa mielivaltaisesti.

Liitännäisyydestä 2.1.1 i) ja vaihdannaisuudesta 2.1.1 ii) seuraa myös *yleinen vaihdannaisuus* eli yhteenlaskettavien järjestys summassa (M) voidaan valita mielivaltaisesti.

Osittelulaeista 2.2.1 v) ja vi) seuraavat *yleiset osittelulait*

$$\begin{array}{ll} a(\mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_n) = a\mathbf{v}_1 + \cdots + a\mathbf{v}_n & (a \in \mathbb{R},\ \mathbf{v}_1, \ldots, v_n \in V) \\ (a_1 + \cdots + a_n)\mathbf{v} = a_1\mathbf{v} + \cdots + a_n\mathbf{v} & (a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R},\ \mathbf{v} \in V). \end{array}$$

Yleisen liitäntälain, vaihdantalain ja yleisten osittelulakien täsmälliset todistukset (induktiolla) sivuutetaan.

Vektorien $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ *erotus* on $\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w}) \in V$. Siis $\mathbf{z} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$ on se yksikäsitteinen V:n vektori, jolla $\mathbf{z} + \mathbf{w} = \mathbf{v}$.

Mm. seuraavat laskusäännöt seuraavat vektoriavaruuden aksioomista i) – viii):

Lause 2.2.5. *Olkoot* $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, $a, b \in \mathbb{R}$. *Silloin*

a) $a\mathbf{v} = \mathbf{0} \iff a = 0$ *tai* $\mathbf{v} = 0$;

b) $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$;

c) $a(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = a\mathbf{v} - a\mathbf{w}$;

d) $(a - b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} - b\mathbf{v}$.

Todistus. (a) " $\Longleftarrow$ ". Koska $0\mathbf{v} = (0+0)\mathbf{v} \overset{\text{vi}}{=} 0\mathbf{v} + 0\mathbf{v}$, on

$$\mathbf{0} \overset{\text{iv}}{=} 0\mathbf{v} + (-0\mathbf{v}) = (0\mathbf{v} + 0\mathbf{v}) + (-0\mathbf{v}) \overset{\text{i}}{=} 0\mathbf{v} + (0\mathbf{v} + (-0\mathbf{v})) \overset{\text{iv}}{=} 0\mathbf{v} + \mathbf{0} \overset{\text{iii}}{=} 0\mathbf{v}.$$

Vastaavasti $a\mathbf{0} \overset{\text{iii}}{=} a(\mathbf{0} + \mathbf{0}) \overset{\text{v}}{=} a\mathbf{0} + a\mathbf{0}$, joten

$$\mathbf{0} = a\mathbf{0} + (-a\mathbf{0}) = (a\mathbf{0} + a\mathbf{0}) + (-a\mathbf{0}) = a\mathbf{0} + (a\mathbf{0} + (-a\mathbf{0})) = a\mathbf{0} + \mathbf{0} = a\mathbf{0}.$$

" $\Longrightarrow$ ". Olkoon $a\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ja $a \neq 0$. Silloin on olemassa $1/a \in \mathbb{R}$, ja

$$\mathbf{v} \overset{\text{viii}}{=} 1\mathbf{v} = (\frac{1}{a} \cdot a)\mathbf{v} \overset{\text{vii}}{=} \frac{1}{a}(a\mathbf{v}) = \frac{1}{a} \cdot \mathbf{0} \overset{\text{ed.}}{=} \mathbf{0}.$$

(b) Koska $\mathbf{v} + (-1)\mathbf{v} = 1\mathbf{v} + (-1)\mathbf{v} = (1 + (-1))\mathbf{v} = 0\mathbf{v} \overset{\text{a)}}{=} \mathbf{0}$, on vastavektorin yksikäsitteisyyden nojalla $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$.

(c)
$$\begin{aligned} a(\mathbf{v} - \mathbf{w}) &\overset{\text{b)}}{=} a(\mathbf{v} + (-1)\mathbf{w}) \overset{\text{v}}{=} a\mathbf{v} + a((-1)\mathbf{w}) \overset{\text{vii}}{=} a\mathbf{v} + (a(-1))\mathbf{w} \\ &= a\mathbf{v} + ((-1)a)\mathbf{w} \overset{\text{vii}}{=} a\mathbf{v} + (-1)(a\mathbf{w}) \overset{\text{b)}}{=} a\mathbf{v} + (-a\mathbf{w}) \\ &= a\mathbf{v} - a\mathbf{w}. \end{aligned}$$

(d)
$(a-b)\mathbf{v} = (a+(-b))\mathbf{v} = a\mathbf{v}+(-b)\mathbf{v} = a\mathbf{v}+((-1)b)\mathbf{v} = a\mathbf{v}+(-1)(b\mathbf{v}) = a\mathbf{v}-b\mathbf{v}$. □

2.3 ALIAVARUUDET

Tarkastellaan vektoriavaruutta V.

Määritelmä 2.3.1. Osajoukko $W \subset V$ on V:n *vektorialiavaruus* (lyhyesti *aliavaruus*), jos

i) $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in W$ aina, kun $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in W$,

ii) $a\mathbf{v} \in W$ aina, kun $\mathbf{v} \in W$ ja $a \in \mathbb{R}$, ja

iii) $\mathbf{0}_V \in W$.

(Aksioomissa i) ja ii) + ja · ovat V:n laskutoimitukset.)

Huomautus 2.3.2. Olkoon $W \subset V$ aliavaruus. 2.3.1 i):n ja ii):n nojalla voidaan määritellä $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in W$ ja $a\mathbf{v} \in W$ kaikilla $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in W$ ja $a \in \mathbb{R}$ käyttäen V:n laskutoimituksia. Näin saaduilla laskutoimituksilla varustettuna W on itsekin vektoriavaruus:

Laskusäännöt 2.2.1 i), ii) ja v) – viii) pätevät W:n vektoreille, koska ne pätevät jopa V:n vektoreille; koska $\mathbf{v} + \mathbf{0}_V = \mathbf{v} \quad \forall\, \mathbf{v} \in W$ (jopa $\forall\, \mathbf{v} \in V$) ja $\mathbf{0}_V \in W$ (2.3.1 iii), niin $\mathbf{0}_V$ kelpaa W:n nollavektoriksi; vektorin $\mathbf{v} \in W$ vastavektoriksi W:ssä kelpaa sen vastavektori $-\mathbf{v}$ V:ssä, sillä 2.3.1 ii):n nojalla $-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v} \in W$.

Aliavaruus ajatellaan aina (ellei toisin mainita) varustetuksi tällä ns. indusoidulla vektoriavaruuden struktuurilla.

Esimerkki 2.3.3. a) $W = \{[\,x_1 \quad x_2\,]^T \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 0\}$ on $\mathbb{R}^2$:n aliavaruus:

i) Olkoon $\mathbf{x} = [\,x_1 \quad x_2\,]^T \in W$ ja $\mathbf{y} = [\,y_1 \quad y_2\,]^T \in W$. Tällöin $\mathbf{x} + \mathbf{y} = [\,x_1 + y_1 \quad x_2 + y_2\,]^T$. Koska

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = 0 + 0 = 0,$$

on $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W$.

ii) Olkoon $\mathbf{x} = [\,x_1 \quad x_2\,]^T \in W$ ja $a \in \mathbb{R}$. Tällöin $a\mathbf{x} = a\,[\,x_1 \quad x_2\,]^T = [\,ax_1 \quad ax_2\,]^T$. Koska

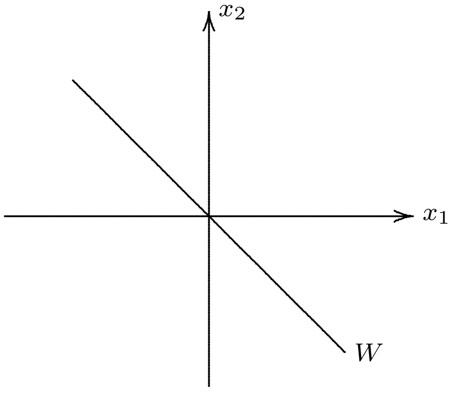
$$(ax_1) + (ax_2) = a(x_1 + x_2) = a \cdot 0 = 0,$$

on $a\mathbf{x} \in W$.

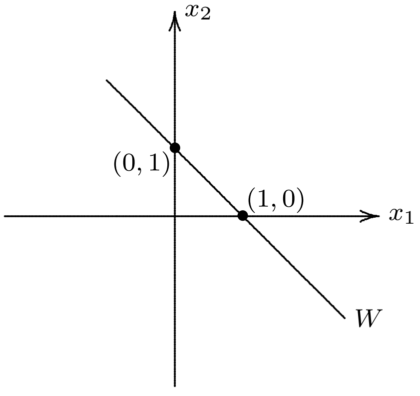
iii) $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2} = [\,0 \quad 0\,]^T \in W$, koska $0 + 0 = 0$.

b) Sen sijaan $W = \{[\,x_1 \quad x_2\,]^T \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 1\}$ ei ole $\mathbb{R}^2$:n aliavaruus, sillä $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2} = [\,0 \quad 0\,]^T \notin W$ $(0 + 0 = 0 \neq 1)$, joten 2.3.1 iii) ei ole voimassa.

Myöskään 2.3.1 i) ja ii) eivät ole voimassa, sillä esimerkiksi $[\,1 \quad 0\,]^T \in W$ ja $[\,0 \quad 1\,]^T \in W$ ja $2 \in \mathbb{R}$, mutta $[\,1 \quad 0\,]^T + [\,0 \quad 1\,]^T = [\,1 \quad 1\,]^T \notin W$ $(1 + 1 = 2 \neq 1)$ ja $2 \cdot [\,1 \quad 0\,]^T = [\,2 \quad 0\,]^T \notin W$ $(2 + 0 = 2 \neq 1)$.



a)



b)

c) Tarkastellaan vektoriavaruutta $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, vektoreina kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Esimerkiksi seuraavat osajoukot ovat $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:n aliavaruuksia:

$$\begin{aligned} C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) &= \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \ f \text{ on jatkuva}\}, \\ C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) &= \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \ f \text{ on derivoituva ja } f' \text{ on jatkuva}\}, \\ P &= \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \ f \text{ on polynomifunktio}\}, \\ P_n &= \{f \in P \mid \deg(f) \leq n\} \quad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

(Todistus $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$:lle: Differentiaali- ja integraalilaskentalaskenta I.1:ssä osoitetaan, että $f+g$ ja af ovat jatkuvia, kun $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia ja $a \in \mathbb{R}$; lisäksi vakiokuvaus $\mathbf{0} : x \mapsto 0$ on jatkuva.)

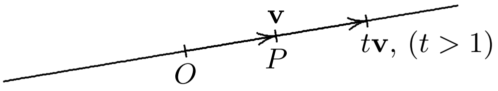
Tässä

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq P_2 \subsetneq \cdots \subsetneq P \subsetneq C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subsetneq C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subsetneq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}.$$

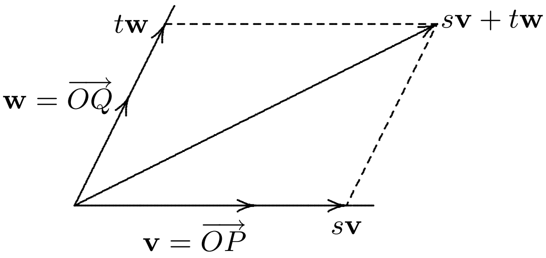
d) Jokaisella vektoriavaruudella V on (ainakin) triviaalit aliavaruudet $\{\mathbf{0}_V\}$ ja V.

Lineaarikombinaatiot ja aliavaruuden virittäminen.

Esimerkki 2.3.4. a) Olkoon $P \in \mathbb{R}^2$ (tai $\mathbb{R}^3$), $P \neq O$ (O origo) ja $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP} \in \mathbb{R}^2$. Tällöin joukko $\{t\mathbf{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$ on O:n ja P:n kautta kulkeva suora.



b) Olkoot $P, Q \in \mathbb{R}^3$, ja oletetaan, että O, P ja Q eivät ole samalla suoralla. Merkitään $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP} \in \mathbb{R}^3$ ja $\mathbf{w} = \overrightarrow{OQ} \in \mathbb{R}^3$. Tällöin joukko $\{s\mathbf{v} + t\mathbf{w} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ on pisteiden O, P ja Q kautta kulkeva taso.



Yleisesti, olkoon V vektoriavaruus ja $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$ vektoreita. Vektorit

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k \in V, \quad x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R},$$

ovat vektoreiden $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ *lineaarikombinaatioita*. Niiden joukkoa merkitään

$$\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \{x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k \mid x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}\} \subset V.$$

(Sopimus: Tämä on $= \{\mathbf{0}\}$, jos $k = 0$, ts. $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ on ”tyhjä jono”.)

Lause 2.3.5.

a) $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ *on V:n aliavaruus.*

b) $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$.

c) *Jos $W \subset V$ on aliavaruus ja $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in W$, niin* $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) \subset W$ *(ts. W sisältää vektoriensa kaikki lineaarikombinaatiot).*

Todistus. a) Jos $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k \in \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$, $\mathbf{w} = y_1\mathbf{v}_1 + \cdots + y_k\mathbf{v}_k \in \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ ja $a \in \mathbb{R}$, on

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + \mathbf{w} &= (x_1 + y_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (x_k + y_k)\mathbf{v}_k \in \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k), \\ a\mathbf{v} &= (ax_1)\mathbf{v}_1 + \cdot + (ax_k)\mathbf{v}_k \in \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k). \end{aligned}$$

Lisäksi $\mathbf{0} = 0\mathbf{v}_1 + \cdots + 0\mathbf{v}_k \in \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$.

b) $\mathbf{v}_j = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k \in \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$, missä $x_j = 1$ ja $x_i = 0$, kun $i \neq j$.

c) Olkoon W aliavaruus ja $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in W$. Olkoot $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$. Kohdan 2.3.1 ii) nojalla $x_j\mathbf{v}_j \in W$ kaikilla $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$; tämän jälkeen kohdan 2.3.1 i) nojalla

$$\begin{aligned} & x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 \in W \\ & x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = (x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2) + x_3\mathbf{v}_3 \in W \\ & \quad \vdots \\ & x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k = (x_1 + \cdots + x_{k-1}\mathbf{v}_{k-1}) + x_k\mathbf{v}_k \in W. \quad \square \end{aligned}$$

Siten $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k)$ on inkluusion $\subset$ suhteen pienin niistä V:n aliavaruuksista, jotka sisältävät vektorit $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$, vektorien $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ *virittämä* aliavaruus.

Huomautus 2.3.6. Jos myös $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_l \in V$, niin

$$\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k) \subset \operatorname{span}(\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_l) \iff \mathbf{v}_j \in \operatorname{span}(\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_l) \quad \forall j.$$

Yleensä tällöin **ei** päde $\mathbf{v}_j \in \{\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_l\}$ millään j:n arvolla.

Laskumenetelmä 2.3.7. *Olkoot* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$. *Tutkittava, onko annettu vektori* $\mathbf{b} = [b_1 \quad b_2 \quad \ldots \quad b_m]^T \in \mathbb{R}^m$ *esitettävissä vektorien* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *lineaarikombinaationa, ts. onko*

$$\mathbf{b} \in \operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n).$$

Ratkaisu. Olkoon $\mathbf{a}_j = [a_{1j} \quad a_{2j} \quad \ldots \quad a_{mj}]^T$ $(j = 1, \ldots, n)$ ja $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$; siis A on $m \times n$-matriisi, jonka sarakkeet ovat $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. Nyt $\mathbf{b} \in \operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \iff x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$ joillakin $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, ja

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = A\mathbf{x},$$

missä $\mathbf{x} = [\,x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n\,]^T \in \mathbb{R}^n$. Siispä $\mathbf{b} \in \operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \iff$ lineaarisella yhtälöryhmällä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, eli

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + \; a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + \; a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

on ratkaisuja $\mathbf{x} = [\,x_1 \quad \dots \quad x_n\,]^T \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Esimerkki 2.3.8. a) Olkoon $\mathbf{a}_1 = [1 \quad 2 \quad 1]^T \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{a}_2 = [1 \quad 0 \quad 2]^T \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{a}_3 = [1 \quad 1 \quad 0]^T \in \mathbb{R}^3$ ja $\mathbf{b} = [2 \quad 1 \quad 5]^T \in \mathbb{R}^3$. Onko $\mathbf{b} \in \operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$?

Ratkaisu. Kuten 2.3.7:ssä todettiin, $\mathbf{b} \in \operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \iff x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$ joillakin $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \iff \mathbf{x} = [\,x_1 \quad x_2 \quad x_3\,]^T \in \mathbb{R}^3$ toteuttaa yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, jonka täydennetty matriisi muunnetaan porrasmuotoon seuraavasti:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ratkaisu on siis $x_3 = -1$, $x_2 = 3 + x_3 = 2$, $x_1 = 2 - x_2 - x_3 = 1$, joten $\mathbf{b} = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 \in \operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$. $\square$

b) Olkoon $\mathbf{a}_1 = [\,1 \quad 2 \quad 1\,]^T \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{a}_2 = [\,1 \quad 0 \quad 2\,]^T \in \mathbb{R}^3$ ja $\mathbf{b} = [\,b_1 \quad b_2 \quad b_3\,]^T \in \mathbb{R}^3$. Millä ehdolla on $\mathbf{b} \in \operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$?

Ratkaisu. Ehtoa $\mathbf{b} \in \operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ vastaavan lineaarisen yhtälöryhmän täydennetty matriisi muuntuu porrasmuotoon seuraavasti:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b_1 \\ 2 & 0 & b_2 \\ 1 & 2 & b_3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & b_3 - b_1 \\ 0 & 0 & b_2 - 4b_1 + 2b_3 \end{array}\right]$$

Siispä $\mathbf{b} \in \operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \iff$ on ratkaisuja $\iff b_2 - 4b_1 + 2b_3 = 0$. $\square$

Matriisiin liittyviä avaruuksia.

Olkoon $A = [\, a_{ij} \,] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $m \times n$-matriisi. A:n *nolla-avaruus* on

$$\mathrm{Null}(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^n;$$

siis Null(A) on homogeenisen yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ eli

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \;\cdots + a_{1n}\,x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + \;\cdots + a_{2n}\,x_n &= 0 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots & \\ a_{m1}x_1 + \;\cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{cases}$$

ratkaisujen $\mathbf{x} = [\, x_1 \quad \dots \quad x_n \,]^T$ joukko.

Lause 2.3.9. Null(A) *on* $\mathbb{R}^n$*:n aliavaruus.*

Todistus. Käytetään matriisitulon ominaisuuksia (1.3.1):

i) Olkoot $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathrm{Null}(A)$. Tällöin $A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$, joten $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in \mathrm{Null}(A)$.

ii) Olkoon $\mathbf{x} \in \mathrm{Null}(A)$ ja $c \in \mathbb{R}$. Tällöin $A(c\mathbf{x}) = c(A\mathbf{x}) = c \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$, joten $c\mathbf{x} \in \mathrm{Null}(A)$.

iii) $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$, joten $\mathbf{0} \in \mathrm{Null}(A)$. □

Tarkastellaan yo. matriisin $A = [\, a_{ij} \,] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sarakkeita

$$\mathbf{a}_j = [\, a_{1j} \quad a_{2j} \quad \dots \quad a_{mj} \,]^T \in \mathbb{R}^m \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

ja rivejä

$$\mathbf{a}^i = [\, a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in} \,] \in \mathbb{R}_n \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

A:n *sarakeavaruus* Col(A) ja *riviavaruus* Row(A) (”sarake” = ”column”, ”rivi” = ”row”) ovat

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) \subset \mathbb{R}^m,$$

$$\mathrm{Row}(A) = \mathrm{span}(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^n) \subset \mathbb{R}_n.$$

Siis Col(A) on $\mathbb{R}^m$:n aliavaruus ja Row(A) on $\mathbb{R}_n$:n aliavaruus.

Lause 2.3.10. *Jos* $m \times n$ *-matriisit* A *ja* B *ovat riviekvivalentit, niin*

a) Null(A) = Null(B),

b) Row(A) = Row(B).

Todistus. a) Koska täydennetty matriisi $[\,A \,¦\, \mathbf{0}\,]$ on riviekvivalentti täydennetyn matriisin $[\,B \,¦\, \mathbf{0}\,]$ kanssa, ovat lauseen 1.5.7 nojalla yhtälöryhmät $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ja $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ekvivalentit. Täten niillä on sama ratkaisujoukko eli $\mathrm{Null}(A) = \mathrm{Null}(B)$.

b) *Erikoistapaus*: B on saatu A:sta yhdellä alkeisrivitoimituksella, joka on tyyppiä I, II tai III. Käsitellään tyyppi III, joka on vaikein.

III. $r \neq s$, $c \in \mathbb{R}$, $\mathbf{b}^s = \mathbf{a}^s + c\mathbf{a}^r$ ja $\mathbf{b}^i = \mathbf{a}^i\ \forall i \neq s$. Tällöin

$$\mathbf{b}^i \in \mathrm{span}(\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^m) = \mathrm{Row}(A)\ \forall\, i,$$

joten

$$\mathrm{Row}(B) = \mathrm{span}(\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^m) \subset \mathrm{Row}(A).$$

Toisaalta, koska $\mathbf{a}^s = \mathbf{b}^s - c\mathbf{b}^r$ ja $\mathbf{a}^i = \mathbf{b}^i\ \forall i \neq s$, on

$$\mathbf{a}^i \in \mathrm{span}(\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^m) = \mathrm{Row}(B)\ \forall\, i,$$

joten

$$\mathrm{Row}(A) = \mathrm{span}(\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^m) \subset \mathrm{Row}(B).$$

Yleinen tapaus: On olemassa jono $A = A_0,\ A_1,\ \dots,\ A_k = B$, missä A_{l+1} on saatu A_l:stä yhdellä alkeisrivitoimituksella ($l = 0, \dots, k-1$). Yllä olevan erikoistapauksen nojalla on

$$\mathrm{Row}(A) = \mathrm{Row}(A_0) = \mathrm{Row}(A_1) = \cdots = \mathrm{Row}(A_k) = \mathrm{Row}(B). \quad \square$$

Huomautus 2.3.11. Jos A ja B riviekvivalentteja, niin yleensä $\mathrm{Col}(A) \neq \mathrm{Col}(B)$.

Esimerkki 2.3.12.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = B,$$

joten A ja B ovat riviekvivalentit. Koska $[1 \quad 1 \quad 1]^T \in \mathrm{Col}(A)$, mutta

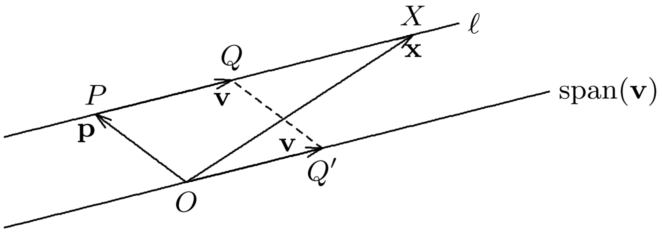
$$[1 \quad 1 \quad 1]^T \notin \mathrm{Col}(B) = \{[x_1 \quad x_2 \quad 0]^T \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\},$$

on $\mathrm{Col}(A) \neq \mathrm{Col}(B)$.

Avaruuksia $\mathrm{Null}(A)$, $\mathrm{Col}(A)$ ja $\mathrm{Row}(A)$ analysoidaan yksityiskohtaisesti jatkossa.

Suorat ja tasot.

Olkoot $P, Q \in \mathbb{R}^2$, $P \neq Q$. Merkitään $\overrightarrow{OP} = \mathbf{p} = [\,p_1 \quad p_2\,]^T$ ja $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{v} = [\,v_1 \quad v_2\,]^T \neq [\,0 \quad 0\,]^T$. Tällöin $\mathbf{v} = \overrightarrow{OQ'}$, missä $Q' = Q - P \in \mathbb{R}^2$.



Kohdan 2.3.4 a) nojalla span($\mathbf{v}$) on O:n ja Q':n kautta kulkeva suora. Olkoon ℓ P:n ja Q:n kautta kulkeva suora, $X \in \mathbb{R}^2$ ja $\overrightarrow{OX} = \mathbf{x} = [\,x_1 \quad x_2\,]^T$. Tällöin $X \in \ell \iff \mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}$ jollakin $t \in \mathbb{R}$, joten

$$\ell = \{\mathbf{p} + t\mathbf{v} \mid t \in \mathbb{R}\},$$

ja ℓ:n *parametrimuotoinen yhtälö* on $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$, eli

$$\ell : \begin{cases} x_1 = p_1 + tv_1 \\ x_2 = p_2 + tv_2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(Sanotaan myös, että ℓ kulkee P:n kautta ja on $\mathbf{v}$:n suuntainen.)
Jos erityisesti $v_1 \neq 0$, on $t = \dfrac{1}{v_1}(x_1 - p_1)$ ja saadaan yhtälö

$$x_2 = p_2 + tv_2 = p_2 + \frac{v_2}{v_1}(x_1 - p_1) = \frac{v_2}{v_1}x_1 + (p_2 - \frac{v_2}{v_1}p_1).$$

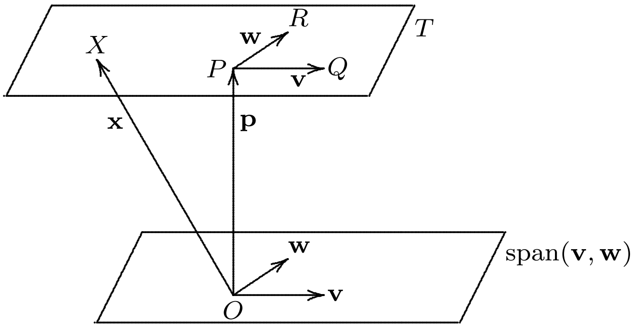
Jos $P, Q \in \mathbb{R}^3$, $P \neq Q$, ja $\overrightarrow{OP} = \mathbf{p} = [\,p_1 \quad p_2 \quad p_3\,]^T$, $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{v} = [\,v_1 \quad v_2 \quad v_3\,]^T \neq [\,0 \quad 0 \quad 0\,]^T$, niin vastaavasti P:n ja Q:n kautta kulkevan $\mathbb{R}^3$:n suoran parametrimuotoinen yhtälö on $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$, eli

$$\ell : \begin{cases} x_1 = p_1 + tv_1 \\ x_2 = p_2 + tv_2 \\ x_3 = p_3 + tv_3 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Esimerkki 2.3.13. Olkoon $P = (2, 3, -4) \in \mathbb{R}^3$ ja $Q = (3, -2, 5) \in \mathbb{R}^3$, jolloin $\mathbf{p} = [\,2 \quad 3 \quad -4\,]^T$ ja $\mathbf{v} = [\,3 - 2 \quad (-2) - 3 \quad 5 - (-4)\,]^T = [\,1 \quad -5 \quad 9\,]^T$. P:n ja Q:n kautta kulkevan $\mathbb{R}^3$:n suoran ℓ parametrimuotoinen yhtälö on

$$\ell : \begin{cases} x_1 = 2 + t \\ x_2 = 3 - 5t \\ x_3 = -4 + 9t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Oletetaan, että piseet $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$ eivät ole samalla suoralla. Merkitään $\overrightarrow{OP} = \mathbf{p} = [\,p_1 \quad p_2 \quad p_3\,]^T$, $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{v} = [\,v_1 \quad v_2 \quad v_3\,]^T$ ja $\overrightarrow{PR} = \mathbf{w} = [\,w_1 \quad w_2 \quad w_3\,]^T$. Tällöin $\mathbf{v} \nparallel \mathbf{w}$ (vektorit eivät ole yhdensuuntaiset).



Kohdan 2.3.4 b) nojalla $\text{span}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \{s\mathbf{v} + t\mathbf{w} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ on pisteiden O, Q' ja R' ($Q' = Q - P$, $R' = R - P$) kautta kulkeva taso.

Olkoon T pisteiden P, Q ja R kautta kulkeva $\mathbb{R}^3$:n taso, $X \in \mathbb{R}^3$ ja $\overrightarrow{OX} = \mathbf{x} = [\,x_1 \quad x_2 \quad x_3\,]^T$. Tällöin $X \in T \iff \mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{v} + t\mathbf{w}$ joillakin $s, t \in \mathbb{R}$; siis

$$T = \{\mathbf{p} + s\mathbf{v} + t\mathbf{w} \mid s, t \in \mathbb{R}\},$$

ja T:n *parametrimuotoinen yhtälö* on $\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{v} + t\mathbf{w}$, $s, t \in \mathbb{R}$, eli

$$T : \begin{cases} x_1 = p_1 + sv_1 + tw_1 \\ x_2 = p_2 + sv_2 + tw_2 \\ x_3 = p_3 + sv_3 + tw_3 \end{cases}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Esimerkki 2.3.15. Olkoon $P = (2, -2, 1)$, $Q = (-1, 0, 3)$ ja $R = (5, -3, 4)$, jolloin $\mathbf{p} = [\,2 \quad -2 \quad 1\,]^T$, $\mathbf{v} = [\,-3 \quad 2 \quad 2\,]^T$ ja $\mathbf{w} = [\,3 \quad -1 \quad 3\,]^T$. P:n, Q:n ja R:n kautta kulkevan $\mathbb{R}^3$:n tason T parametrimuotoinen yhtälö on siis

$$T : \begin{cases} x_1 = 2 - 3s + 3t \\ x_2 = -2 + 2s - t \\ x_3 = 1 + 2s + 3t \end{cases}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Huomautus 2.3.15. Suora tai taso on (vektori-) aliavaruus vain, jos se kulkee origon kautta. Sen sijaan suora tai taso on aina ns. *affiini aliavaruus*, so. muotoa

$$\mathbf{p} + W = \{\mathbf{p} + \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in W\},$$

missä W on vektorialiavaruus ja $\mathbf{p}$ kiinteä vektori. Huomaa, että tässä vektori $\mathbf{p}$ ei ole yksikäsitteisesti määrätty; itse asiassa $\mathbf{p} + W = \mathbf{p}' + W \iff \mathbf{p} - \mathbf{p}' \in W$.

Tällä kurssilla aina ”aliavaruus” on ”vektorialiavaruus”.

2.4 LINEAARINEN RIIPPUMATTOMUUS

Olkoon V vektoriavaruus ja $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ... , $\mathbf{v}_k \in V$ vektoreita.

Määritelmä 2.4.1. Jono $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ on *vapaa* eli *lineaarisesti riippumaton*, jos yhtälö

$$x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}, \quad x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R},$$

toteutuu vain, kun $x_1 = \cdots = x_k = 0$. Tällöin sanotaan myös, että vektorit $\mathbf{v}_1$, ... , $\mathbf{v}_k$ ovat lineaarisesti riippumattomat. Muussa tapauksessa jono $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ on *sidottu* eli *lineaarisesti riippuva*.

(Sopimus: Tyhjä jono (tapaus $k = 0$) on vapaa.)

Määritelmän mukaan $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ on sidottu $\iff$ löytyy sellaiset luvut x_1, ... , x_k, että ainakin yksi $x_j \neq 0$ ja $x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$.

Vapaus on siis (järjestetylle) vektorijonolle määritelty ominaisuus. Koska V:n yhteenlasku on vaihdannainen, jonon vapaus ei kuitenkaan riipu vektoreiden järjestyksestä: Jos $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ on vapaa (vastaavasti sidottu) ja $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k\} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ (samat vektorit eri järjestyksessä), niin $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k)$ on vapaa (vastaavasti sidottu).

Huomautus 2.4.2. Olkoot $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ... , $\mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ sarakevektoreita ja olkoon $A = [\,\mathbf{a}_1 \ \ \mathbf{a}_2 \ \ \cdots \ \ \mathbf{a}_n\,] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ se $m \times n$-matriisi, jonka sarakkeet ovat $\mathbf{a}_1$, ... , $\mathbf{a}_n$. Tällöin jono $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ on vapaa, jos ja vain jos vektoriyhtälöllä $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ eli homogeenisella yhtälöryhmällä $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on vain triviaali ratkaisu $\mathbf{x} = [\,x_1 \ \ \cdots \ \ x_n\,]^T = \mathbf{0}$.

Esimerkki 2.4.3. $\mathbf{a}_1 = [1 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 2]^T \in \mathbb{R}^4$, $\mathbf{a}_2 = [0 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 2]^T \in \mathbb{R}^4$ ja $\mathbf{a}_3 = [1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 3]^T \in \mathbb{R}^4$. Tutkitaan yhtälöä $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \overset{(1)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \overset{(2)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 \quad + x_3 = 0 \\ \quad x_2 + x_3 = 0 \\ \quad\quad - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff x_1 = x_2 = x_3 = 0 \qquad \therefore\ (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \text{ on vapaa.} \quad \square$$

(*Selitykset*: 1) Riviin 3 lisätään $(-1) \times$ rivi 1, riviin 4 lisätään $(-2) \times$ rivi 1. 2) Riviin 3 lisätään $(-1) \times$ rivi 2, riviin 4 lisätään $(-2) \times$ rivi 2.)

Esimerkki 2.4.4. Olkoot $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

a) $(\mathbf{v})$ on vapaa $\iff$ $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Todistus: " $\Longrightarrow$ ". Jos $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, on $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$; koska $1 \neq 0$, on $(\mathbf{v})$ sidottu.
" $\Longleftarrow$ ". Olkoon $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Jos $x\mathbf{v} = \mathbf{0}$, niin 2.2.5 a):n nojalla $x = 0$; siis $(\mathbf{v})$ on vapaa. $\square$

b) $(\mathbf{v},\mathbf{w})$ on sidottu $\iff$ $\mathbf{w}=a\mathbf{v}$ jollakin $a\in\mathbb{R}$ tai $\mathbf{v}=b\mathbf{w}$ jollakin $b\in\mathbb{R}$.

Todistus: " $\Longrightarrow$ ". Jos $(\mathbf{v},\mathbf{w})$ on sidottu, on $x\mathbf{v}+y\mathbf{w}=\mathbf{0}$ eräillä $x,y\in\mathbb{R}$, missä $x\neq 0$ tai $y\neq 0$. Jos $y\neq 0$, on $\mathbf{w}=-(x/y)\mathbf{v}$, ja jos $x\neq 0$, on $\mathbf{v}=-(y/x)\mathbf{w}$.
" $\Longleftarrow$ ". Jos $\mathbf{w}=a\mathbf{v}$, niin $a\mathbf{v}+(-1)\mathbf{w}=\mathbf{0}$, joten $(\mathbf{v},\mathbf{w})$ on sidottu. Jos taas $\mathbf{v}=b\mathbf{w}$, niin $1\cdot\mathbf{v}+(-b)\mathbf{w}=\mathbf{0}$, joten nytkin $(\mathbf{v},\mathbf{w})$ on sidottu. □

Jos $(\mathbf{v},\mathbf{w})$ on sidottu (ks. 2.4.4 b), sanotaan, että vektorit $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ ovat *yhdensuuntaiset*, ja merkitään $\mathbf{v}\parallel\mathbf{w}$.

Lemma 2.4.5. *Jos* $(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k)$ *on vapaa, niin jokainen osajono* $(\mathbf{v}_{j_1},\dots,\mathbf{v}_{j_l})$, $1\le j_1<j_2<\dots<j_l\le k$, *on myös vapaa.*

Todistus. Olkoon $x_{j_1}\mathbf{v}_{j_1}+\dots+x_{j_l}\mathbf{v}_{j_l}=\mathbf{0}$, $x_{j_1},\dots,x_{j_l}\in\mathbb{R}$. Merkitään $x_j=0$, kun $j\in\{1,2,\dots,k\}\setminus\{j_1,j_2,\dots,j_l\}$. Tällöin $x_1\mathbf{v}_1+x_2\mathbf{v}_2+\dots+x_k\mathbf{v}_k=\mathbf{0}$ (summaan $x_{j_1}\mathbf{v}_{j_1}+\dots+x_{j_l}\mathbf{v}_{j_l}$ on lisätty yhteenlaskettavat $x_j\mathbf{v}_j=0\mathbf{v}_j=\mathbf{0}$, $j\in\{1,2,\dots,k\}\setminus\{j_1,j_2,\dots,j_l\}$). Koska $(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_k)$ on vapaa, on $x_1=x_2=\dots=x_k=0$, joten erityisesti $x_{j_1}=x_{j_2}=\dots=x_{j_l}=0$. □

Seuraus 2.4.6. *Vapaassa jonossa* $(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k)$ *on* $\mathbf{v}_j\neq\mathbf{0}$ $\forall j$, *ja* $\mathbf{v}_i\nparallel\mathbf{v}_j$ *aina kun* $i\neq j$; *erityisesti* $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k$ *ovat kaikki eri vektoreita.*

Todistus. Väite seuraa välittömästi esimerkistä 2.4.4 ja lemmasta 2.4.5. □

Lemma 2.4.7. *Olkoon jono* $(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k)$ *vapaa* V*:ssä ja* $\mathbf{w}\in V$. *Silloin*

$$(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k,\mathbf{w}) \textit{ on vapaa } \iff \mathbf{w}\notin\operatorname{span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k).$$

Todistus. " $\Longrightarrow$ ". Olkoon $\mathbf{w}\in\operatorname{span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k)$. Tällöin $\mathbf{w}=x_1\mathbf{v}_1+\dots+x_k\mathbf{v}_k$ eräillä $x_1,\dots,x_k\in\mathbb{R}$, joten $x_1\mathbf{v}_1+\dots+x_k\mathbf{v}_k+(-1)\mathbf{w}=\mathbf{0}$. Tässä esiintyvistä skalaarikertoimista ainakin $-1\neq 0$, joten $(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k,\mathbf{w})$ on sidottu.

" $\Longleftarrow$ ". Oletetaan, että $\mathbf{w}\notin\operatorname{span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k)$. Olkoot $x_1,\dots,x_k,y\in\mathbb{R}$ sellaisia, että $x_1\mathbf{v}_1+\dots+x_k\mathbf{v}_k+y\mathbf{w}=\mathbf{0}$. Silloin täytyy olla $y=0$; jos nimittäin olisi $y\neq 0$, niin $\mathbf{w}=-(x_1/y)\mathbf{v}_1+\dots-(x_k/y)\mathbf{v}_k\in\operatorname{span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k)$ vastoin oletusta. Siis $x_1\mathbf{v}_1+\dots+x_k\mathbf{v}_k=\mathbf{0}$; koska $(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k)$ on vapaa, on $x_1=\dots=x_k=0$. Näin ollen $(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k,\mathbf{w})$ on vapaa. □

Lemma 2.4.8. *Jos* $\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_l\in\operatorname{span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k)$ *ja* $l>k$, *jono* $(\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_l)$ *on sidottu.*

Todistus. Oletuksen mukaan on olemassa sellainen matriisi $A=[\,a_{ij}\,]\in\mathbb{R}^{k\times l}$, että

$$\mathbf{w}_j=\sum_{i=1}^{k}a_{ij}\mathbf{v}_i,\quad j=1,\dots,l.$$

Homogeenisessa yhtälöryhmässä $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{x} = [\,x_1, \ldots, x_l\,]^T$, on k yhtälöä ja l tuntematonta; koska $k < l$, on yhtälöryhmällä lauseen 1.5.12 nojalla epätriviaaleja ratkaisuja. Siten voidaan valita $\mathbf{x} = [\,x_1, \ldots, x_l\,]^T \neq \mathbf{0}$ niin, että $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ eli

$$\sum_{j=1}^{l} a_{ij} x_j = 0, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Tästä seuraa, että

$$\sum_{j=1}^{l} x_j \mathbf{w}_j = \sum_{j=1}^{l} \left(\sum_{i=1}^{k} x_j a_{ij} \mathbf{v}_i \right) = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{l} a_{ij} x_j \right) \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{k} 0 \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{0},$$

ja ainakin yksi $x_j \neq 0$. Siispä $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_l)$ on sidottu. □

2.5 KANTA JA DIMENSIO

Olkoon V vektoriavaruus

Määritelmä 2.5.1. Jono $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ V:n vektoreita on V:n *kanta*, jos

i) $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ on vapaa, ja

ii) $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ virittää V:n ts. $V = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$.

(Erikoistapaus $k = 0$: Tyhjä jono on avaruuden $\{\mathbf{0}\}$ kanta.)

Lause 2.5.2. *Olkoon* $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ *jono* V*:n vektoreita. Tällöin* $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ *on* V*:n kanta* $\Longleftrightarrow$ *jokaisella* $\mathbf{v} \in V$ *on yksikäsitteinen esitys* $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k$*, missä* $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$.

Todistus. " $\Longrightarrow$ ". Olkoon $\mathbf{v} \in V$. Koska $V = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$, on $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k$ eräillä $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$.

Esityksen yksikäsitteisyys: Olkoon myös $\mathbf{v} = y_1\mathbf{v}_1 + \cdots + y_k\mathbf{v}_k$, $y_1, \ldots, y_k \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\mathbf{0} = \mathbf{v} - \mathbf{v} = (x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k) - (y_1\mathbf{v}_1 + \cdots + y_k\mathbf{v}_k) = (x_1 - y_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (x_k - y_k)\mathbf{v}_k;$$

koska $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ on vapaa, on $x_1 - y_1 = 0, \ldots, x_k - y_k = 0$, joten $x_1 = y_1, \ldots, x_k = y_k$.

" $\Longleftarrow$ ". Jos jokaisella $\mathbf{v} \in V$ on esitys $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k$, niin $V = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$.

Vapaus: Olkoot $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ sellaisia, että $x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$. Koska myös $\mathbf{0} = 0\mathbf{v}_1 + \cdots + 0\mathbf{v}_k$, on $\mathbf{0}$:n esityksen yksikäsitteisyyden nojalla $x_1 = 0, \ldots, x_k = 0$. □

Jos $S = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ on V:n kanta, $\mathbf{v} \in V$ ja $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k$, missä $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$, kutsutaan sarakevektoria

$$[\mathbf{v}]_S = [\,x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_k\,]^T \in \mathbb{R}^k$$

V:n vektorin $\mathbf{v}$ *koordinaattivektoriksi* kannan S suhteen.

Esimerkki 2.5.3. a) Olkoon $n \geq 1$. Määritellään $\mathbf{e}_1 = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^T \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{e}_2 = [0 \quad 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^T \in \mathbb{R}^n$, ..., $\mathbf{e}_n = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]^T \in \mathbb{R}^n$. Tällöin $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ on $\mathbb{R}^n$:n (ns. *luonnollinen) kanta.*

Todistus. Viritys: Kun $\mathbf{x} = [x_1 \quad \cdots \quad x_n]^T \in \mathbb{R}^n$, on

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n;$$

siten $\mathbb{R}^n = \operatorname{span}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$.

Vapaus: $\mathbf{0} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n = [x_1 \quad \cdots \quad x_n]^T \implies x_1 = \cdots = x_n = 0$. □

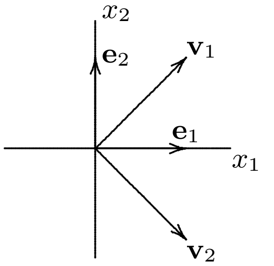
Tapauksessa $n = 2$ on perinteisesti käytetty merkintöjä $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j}$, ja tapauksessa $n = 3$ merkintöjä $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j}$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$.

b) Samoin $(\mathbf{e}_1^T, \mathbf{e}_2^T, \dots, \mathbf{e}_n^T)$ on $\mathbb{R}_n$:n (luonnollinen) kanta ($\mathbf{e}_1^T = [1 \quad 0 \quad \cdots 0]$ jne.).

c) Jono $(1, t, t^2, \dots, t^n)$, missä t^j tarkoittaa polynomifunktiota $t \mapsto t^j$, on P_n:n kanta, sillä $f \in P_n \iff f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on polynomifunktio, $\deg(f) \leq n \iff$ on olemassa yksikäsitteiset kertoimet a_0, a_1, ... , $a_n \in \mathbb{R}$, joilla

$$f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

d) a):sta seuraa, että $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = ([1 \quad 0]^T, [0 \quad 1]^T)$ on $\mathbb{R}^2$:n kanta. Merkitään $\mathbf{v}_1 = [1 \quad 1]^T \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v}_2 = [1 \quad -1]^T \in \mathbb{R}^2$. Väitämme, että myös $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ on $\mathbb{R}^2$:n kanta.



Todistus. Vapaus: $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \implies x_1 + x_2 = x_1 - x_2 = 0 \implies x_1 = x_2 = 0$.

Viritys: $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2$ ja $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{v}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{v}_2$

$\implies \mathbb{R}^2 = \operatorname{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \subset \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \subset \mathbb{R}^2 \implies \mathbb{R}^2 = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$. □

Esimerkistä 2.5.3 d) nähdään, että samalla vektoriavaruudella voi olla useita kantoja. Kuitenkin pätee:

Lause 2.5.4. *Jos vektoriavaruudella* V *on kannat* $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ *ja* $(\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_l)$*, niin* $k = l$*; siis jokaisessa* V*:n kannassa on yhtä monta vektoria.*

Todistus. Koska $(\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_l)$ on V:n kanta, se on vapaa, ja koska $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ on V:n kanta, se virittää V:n. Näin ollen $\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_l \in \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$. Tästä seuraa, että täytyy olla $l \leq k$; jos nimittäin olisi $l > k$, niin lemman 2.4.8 nojalla $(\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_l)$ olisi sidottu.

Vastaavasti todetaan, että $k \leq l$. □

Määritelmä 2.5.5. Jos V:llä on kanta $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$, niin $k = \dim(V) \in \mathbb{N}$ on V:n *dimensio*. (Erityisesti $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$.)

Esimerkki 2.5.6. a) Esimerkin 2.5.3 nojalla $\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\mathbb{R}_n) = n$; $\dim(P_n) = n + 1$.

b) $\dim(\mathbb{R}^{m \times n}) = mn$, sillä matriisit I_{rs} jossakin järjestyksessä ($r = 1, \dots, m$, $s = 1, \dots, n$; vrt. sivu 23) muodostavat $\mathbb{R}^{m \times n}$:n kannan.

Emme tiedä vielä, millä avaruuksilla on (äärellinen) kanta (ja siis dimensio).

Määritelmä 2.5.7. Vektoriavaruus V on *äärellisulotteinen*, jos se on äärellisen monen vektorinsa virittämä, ts. $V = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ joillakin $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$.

Esimerkki 2.5.8. a) $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n$, $\mathbb{R}^{m \times n}$ ja P_n ovat äärellisulotteisia.

b) Kaikkien polynomien avaruus P ei ole äärellisulotteinen. Jos nimittäin olisi $P = \operatorname{span}(f_1, \dots, f_k)$, niin kaikilla $f \in P$ olisi $\deg(f) \leq d < \infty$, missä $d = \max\{\deg(f_1), \dots, \deg(f_k)\}$.

Lause 2.5.9. *Vektoriavaruudella* V *ovat seuraavat ehdot yhtäpitävät:*

i) V *on äärellisulotteinen.*

ii) V*:n vapaiden jonojen pituudet muodostavat ylhäältä rajoitetun joukon.*

iii) V*:llä on (äärellinen) kanta.*

Todistus. i) $\Longrightarrow$ ii). Olkoon $V = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$. Silloin jokaisella V:n vapaalla jonolla $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l)$ on lemman 2.4.8 nojalla $l \leq k$; siis k on vapaiden jonojen pituuksien joukon yläraja.

ii) $\Longrightarrow$ iii). Ehdon ii) mukaan V:n vapaiden jonojen pituudet muodostavat ylhäältä rajoitetun epätyhjän joukon luonnollisia lukuja (joukossa on alkiona ainakin tyhjän jonon pituus 0). Tässä joukossa on suurin alkio m. Nyt siis m on erään vapaan jonon $S = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)$ pituus, ja mikään $(m+1)$-alkioinen jono ei ole vapaa. Tästä seuraa, että vapaa jono S myös virittää koko V:n; jos nimittäin olisi olemassa vektori $\mathbf{w} \in V \setminus \operatorname{span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)$, niin lemman 2.4.7 mukaan $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{w})$ olisi $(m+1)$-alkioinen vapaa jono. Siis S on V:n kanta.

iii) $\Longrightarrow$ i) on triviaali. □

Jokaisella äärellisulotteisella vektoriavaruudella V on siis kanta, joten myös dimensio $\dim(V)$ on määritelty.

Päättelemällä samaan tapaan kuin 2.5.9:n todistuksen osassa ii) $\Longrightarrow$ iii) saadaan seuraava tarkempi tulos:

Lause 2.5.10. *Olkoon* $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p)$ *avaruuden* V *vapaa jono, ja olkoot* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$ *sellaisia vektoreita, että jono* $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ *virittää* V*:n. Tällöin on olemassa* $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$*:n osajono* $(\mathbf{v}_{j_1}, \ldots, \mathbf{v}_{j_r})$ *(*$1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq k$*), jolla jono* $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p, \mathbf{v}_{j_1}, \ldots, \mathbf{v}_{j_r})$ *on* V*:n kanta.*

Todistus. Tarkastellaan jonon $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ kaikkia osajonoja $(\mathbf{v}_{j_1}, \ldots, \mathbf{v}_{j_r})$, joilla jono $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p, \mathbf{v}_{j_1}, \ldots, \mathbf{v}_{j_r})$ on vapaa; ainakin tyhjä osajono on tällainen. Valitaan mahdollisimman pitkä tällainen osajono $(\mathbf{v}_{j_1}, \ldots, \mathbf{v}_{j_r})$. Nyt siis jono $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p, \mathbf{v}_{j_1}, \ldots, \mathbf{v}_{j_r})$ on vapaa, ja riittää osoittaa, että sen virittämä aliavaruus W on koko V (silloin ko. $(p+r)$-alkioinen jono on V:n kanta).

Vastaoletus: $W \neq V$. Tällöin jollakin $j' \in \{1, \ldots, k\}$ täytyy olla $\mathbf{v}_{j'} \notin W$; jos nimittäin olisi $\mathbf{v}_j \in W$ kaikilla $j \in \{1, \ldots, k\}$, niin $V = \operatorname{span}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) \subset W$, mistä seuraisi $W = V$ vastoin vastaoletusta. Lisäämällä vektori $\mathbf{v}_{j'}$ osajonoon $(\mathbf{v}_{j_1}, \ldots, \mathbf{v}_{j_r})$ (sopivaan kohtaan) saadaan $(r+1)$-alkioinen $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$:n osajono, ja lemman 2.4.7 nojalla vastaava $(p+r+1)$-alkioinen jono on myös vapaa. Tämä on mahdotonta, koska osajono $(\mathbf{v}_{j_1}, \ldots, \mathbf{v}_{j_r})$ valittiin jo alun perin mahdollisimman pitkäksi. □

Seuraus 2.5.11. *Olkoon* V *äärellisulotteinen vektoriavaruus.*

a) V*:n vapaa jono* $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p)$ *voidaan sopivilla vektoreilla* $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r \in V$ *täydentää* V*:n kannaksi* $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r)$*.*

b) V*:n jokaisen virittäjäjonon* $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ *jokin osajono on* V*:n kanta.*

Todistus. a) Valitaan lauseessa 2.5.10 jonoksi $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ mikä tahansa V:n virittäjäjono; sellaisia on olemassa, koska V on äärellisulotteinen.

b) Valitaan lauseessa 2.5.10 jonoksi $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p)$ tyhjä jono. □

Lause 2.5.12. *Olkoon* V *äärellisulotteinen vektoriavaruus ja* $W \subset V$ *aliavaruus. Tällöin* W *on myös äärellisulotteinen, ja* $\dim(W) \leq \dim(V)$*. Jos* $W \neq V$*, niin* $\dim(W) < \dim(V)$*.*

Todistus. Koska jokainen W:n vapaa jono on vapaa myös avaruudessa V, toteuttaa W ehdon 2.5.9 ii) (koska V toteuttaa sen), ja on siis äärellisulotteinen. 2.5.9 iii):n nojalla W:lla on kanta $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p)$, ja 2.5.11 a):n mukaan tämä V:n vapaa jono voidaan täydentää V:n kannaksi $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r)$. Siten $\dim(W) = p \leq p + r = \dim(V)$. Jos $W \neq V$, uusia kantavektoreita $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r$ tarvitaan ainakin yksi; siis tällöin $r \geq 1$ ja $\dim(W) < \dim(V)$. □

Esimerkki 2.5.13. Olkoon $W \subset \mathbb{R}^n$ aliavaruus ja $\{\mathbf{0}\} \neq W \neq \mathbb{R}^n$. Tällöin

$$\dim(W) \in \{1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Jos $n = 2$, W on origon kautta kulkeva suora $(\dim(W) = 1)$ ja jos $n = 3$, W on origon kautta kulkeva suora $(\dim(W) = 1)$ tai taso $(\dim(W) = 2)$.

Lause 2.5.14. *Olkoon* $\dim(V) = n$ *ja* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$.

a) *Jos* $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ *on vapaa, niin* $k \leq n$*; tällöin* $k = n \iff (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ *on* V*:n kanta.*

b) *Jos* $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = V$*, niin* $k \geq n$*; tällöin* $k = n \iff (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ *on* V*:n kanta.*

Todistus. a) Olkoon $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ vapaa. Jos $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ on V:n kanta, niin lauseen 2.5.4 mukaan $k = n$. Jos $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ ei ole kanta, niin $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) \neq V$, jolloin lauseen 2.5.12 mukaan $k = \dim \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) < \dim(V) = n$.

b) Olkoon $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = V$. Taas $k = n$, jos $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ on V:n kanta. Jos $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ ei ole kanta, niin seurauksen 2.5.11.b) mukaan eräs aito osajono $(\mathbf{v}_{j_1}, \ldots, \mathbf{v}_{j_r})$ on kanta; siis $r < k$ ja $n = \dim(V) = r < k$. □

Erityisesti $\mathbb{R}^n$:ssä jokainen n:n vektorin pituinen vapaa jono on kanta, samoin jokainen n:n vektorin pituinen virittävä jono.

2.6 Menetelmiä kannan etsimiseksi

Tulosten 2.5.9 iii) ja 2.5.11 todistukset eivät valitettavasti anna mitään konkreettisia laskumenetelmiä kantojen etsimiseksi, eikä tällaisia menetelmiä yleiselle vektoriavaruudelle V tietenkään voikaan olla olemassa. Kehitämme seuraavassa laskumenetelmiä, jotka toimivat eräillä koordinaattiavaruuksien $\mathbb{R}^n$ aliavaruuksilla V.

Sarake- ja riviavaruuden kanta.

Olkoon $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $m \times n$-matriisi, jonka sarakkeet ovat $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ ja rivit $\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^m \in \mathbb{R}_n$. Tutkitaan avaruuksia

$$\operatorname{Col}(A) = \operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \subset \mathbb{R}^m \quad \text{ja} \quad \operatorname{Row}(A) = \operatorname{span}(\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^m) \subset \mathbb{R}_n.$$

Muunnetaan A alkeisrivitoimituksilla porrasmatriisiksi B. Olkoot B:n sarakkeet $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n \in \mathbb{R}^m$ ja B:n rivit $\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^m \in \mathbb{R}_n$. Olkoot B:n johtavat alkiot kohdissa $(1, j_1), \ldots, (r, j_r)$. Silloin erityisesti $\mathbf{b}^i \neq \mathbf{0}$, kun $1 \leq i \leq r$, ja $\mathbf{b}^i = \mathbf{0}$, kun $r < i \leq m$.

Laskumenetelmä 2.6.1. $(\mathbf{a}_{j_1}, \ldots, \mathbf{a}_{j_r})$ *on* $\operatorname{Col}(A)$*:n kanta.*

Todistus. Vapaus: Olkoot $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r} \in \mathbb{R}$ sellaisia, että $x_{j_1}\mathbf{a}_{j_1} + \cdots + x_{j_r}\mathbf{a}_{j_r} = \mathbf{0}$. Merkitään $x_j = 0$, kun $j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{j_1, \ldots, j_r\}$, ja $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$.

Silloin $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ eli $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Koska A ja B ovat riviekvivalentit, myös $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (yhtälöryhmillä on samat ratkaisut). Näin ollen $x_1\mathbf{b}_1 + \cdots + x_n\mathbf{b}_n = \mathbf{0}$ ja edelleen $x_{j_1}\mathbf{b}_{j_1} + \cdots + x_{j_r}\mathbf{b}_{j_r} = \mathbf{0}$ (koska muut x_j:t valittiin nolliksi). Tällöin vastaavan yhtälöryhmän yhtälö $r \implies x_{j_r} = 0$; sen jälkeen yhtälö $r-1 \implies x_{j_{r-1}} = 0, \ldots$, yhtälö $1 \implies x_{j_1} = 0$.

Viritys: Riittää osoittaa, että $\mathbf{a}_j \in \operatorname{span}(\mathbf{a}_{j_1}, \ldots, \mathbf{a}_{j_r})$ myös, kun $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j_1, \ldots, j_r\}$. Olkoon siis $j_0 \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j_1, \ldots, j_r\}$. Tarkastellaan yhtälöryhmää $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$, jonka ratkaisut saadaan 1.5.8 a):sta. Annetaan vapaille muuttujille seuraavat arvot:

$$x_{j_0} = 1; \qquad x_j = 0, \quad \text{kun} \quad j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j_0, j_1, \ldots, j_r\}.$$

Olkoon $\mathbf{x} = \mathbf{s} = [\, s_1 \quad s_2 \quad \cdots \quad s_n \,]^T$ vastaava yhtälöryhmän $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ratkaisu. Koska yhtälöryhmät $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ja $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ovat ekvivalentit, on $\mathbf{x} = \mathbf{s}$ myös yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ratkaisu, ts. $A\mathbf{s} = \mathbf{0}$ eli $s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \cdots + s_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$. Tästä saadaan

$$s_{j_1}\mathbf{a}_{j_1} + \cdots + s_{j_r}\mathbf{a}_{j_r} + 1 \cdot \mathbf{a}_{j_0} = \mathbf{0}$$

(muut s_j:t $= 0$), joten $\mathbf{a}_{j_0} \in \operatorname{span}(\mathbf{a}_{j_1}, \ldots, \mathbf{a}_{j_r})$. □

Menetelmässä 2.6.1 sarakeavaruuden kantavektoreiksi poimitaan siis alkuperäisestä matriisista A porrasmatriisin B johtavien alkioiden sarakkeita vastaavat sarakevektorit.

Laskumenetelmä 2.6.2. $(\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^r)$ *on* $\operatorname{Row}(A)$*:n kanta.*

Todistus. Lauseen 2.3.10 b) mukaan on

$$\begin{aligned}\operatorname{Row}(A) = \operatorname{Row}(B) &= \operatorname{span}(\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^m) \\ &= \operatorname{span}(\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^r, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}) = \operatorname{span}(\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^r)\end{aligned}$$

Jää siis osoitettavaksi, että $(\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^r)$ on vapaa.

Olkoon $x_1\mathbf{b}^1 + \cdots + x_r\mathbf{b}^r = \mathbf{0}$, $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{R}$. Tämä lineaarikombinaatio on rivivektori, jonka j_1-komponentti on $= x_1$; koska lineaarikombinaatio $= \mathbf{0}$, on siis erityisesti $x_1 = 0$. Tutkimalla tämän jälkeen lineaarikobinaation j_2-, … , j_r-komponentteja (tässä järjestyksessä) nähdään edelleen, että $x_2 = 0, \ldots, x_r = 0$. □

Menetelmässä 2.6.2 riviavaruuden kantavektorit ovat siis porrasmatriisin B nollasta eroavat rivit.

Seuraus 2.6.3. $\dim \operatorname{Col}(A) = \dim \operatorname{Row}(A)$ $(= r)$. □

Esimerkki 2.6.4.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix} \overset{1.5.6}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 & \frac{19}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B.$$

Menetelmän 2.6.1 mukaan eräs Col(A):n kanta koostuu vektoreista

$$[0 \quad 0 \quad 2 \quad 2]^T, \quad [2 \quad 0 \quad 2 \quad 0]^T, \quad [3 \quad 2 \quad -5 \quad -6]^T.$$

Menetelmän 2.6.2 mukaan eräs Row(A):n kanta koostuu vektoreista

$$[1 \quad 0 \quad 0 \quad 9 \quad \tfrac{19}{2}], \quad [0 \quad 1 \quad 0 \quad -\tfrac{17}{4} \quad -\tfrac{5}{2}], \quad [0 \quad 0 \quad 1 \quad \tfrac{3}{2} \quad 2].$$

Huomautus 2.6.5. Olkoon annettu sarakevektorit $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^m$. Aliavaruudelle $V = \mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) \subset \mathbb{R}^m$ voidaan etsiä kanta kahdella eri menetelmällä (tuloksena yleensä 2 eri kantaa):

a) Muodostetaan matriisi $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, jonka *sarakkeet* ovat $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ ja etsitään kanta avaruudelle $V = \mathrm{Col}(A)$ kuten 2.6.1:ssa.

b) Muodostetaan matriisi $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$, jonka *rivit* ovat $\mathbf{v}_1^T, \ldots, \mathbf{v}_n^T$ (siis $C = A^T$, missä A on kuten a):ssa), ja etsitään Row(C):lle kanta $(\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^r)$ menetelmällä 2.6.2; tällöin selvästi $((\mathbf{b}^1)^T, \ldots, (\mathbf{b}^r)^T)$ on avaruuden $\mathrm{Col}(C^T) = \mathrm{Col}(A) = V$ kanta.

Esimerkki 2.6.6. Olkoon

$$\mathbf{v}_1 = [1 \quad 2 \quad 3]^T, \quad \mathbf{v}_2 = [2 \quad 3 \quad 5]^T, \quad \mathbf{v}_3 = [0 \quad 1 \quad 1]^T$$

ja $V = \mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. Etsitään V:lle kanta kummallakin 2.6.5 mainitulla strategialla:

$$\text{(a)} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Siis $r = 2$, ja saadaan V:n kanta $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.

$$\text{(b)} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Saadaan siis V:n kanta $([1 \quad 2 \quad 3]^T, [0 \quad 1 \quad 1]^T) \neq (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.

Huomautus 2.6.7. Menetelmän 2.6.1 antamalla avaruuden $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{span}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ kannalla $(\mathbf{a}_{j_1}, \ldots, \mathbf{a}_{j_r})$ on seuraava ominaisuus:

Kun $s \leq r$, on $(\mathbf{a}_{j_1}, \ldots, \mathbf{a}_{j_s})$ avaruuden $\mathrm{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \ldots, \mathbf{a}_{j_s})$ kanta (tarkastellaan vain sarakkeita $1, 2, \ldots, j_s$).

Jos erityisesti jonon alkupää $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ $(k \leq n)$ on valmiiksi vapaa, niin $\mathbf{a}_{j_l} = \mathbf{a}_l$ arvoilla $l = 1, 2, \ldots, k$. Vastaava pätee 2.6.5 a):ssa.

Esimerkki 2.6.8. $\mathbb{R}^m$:n vapaa jono $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ $(k < m)$ voidaan käytännössä täydentää $\mathbb{R}^m$:n kannaksi soveltamalla menetelmää 2.6.1 matriisiin $A \in \mathbb{R}^{m\times(k+m)}$, jonka sarakkeet ovat $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ (silloin $\mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^m$).

Nolla-avaruuden kanta.

Olkoon A $m \times n$-matriisi. Palautetaan mieleen A:n nolla-avaruus

$$\mathrm{Null}(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\},$$

ts. homogeenisen yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ratkaisujoukko. Lauseen 2.3.9 nojalla $\mathrm{Null}(A)$ on $\mathbb{R}^n$:n aliavaruus.

Ratkaistaan yhtälöryhmä $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ Gaussin (tai Gaussin-Jordanin) eliminointimenetelmällä, ts. muunnetaan A alkeisrivitoimituksilla porrasmatriisiksi C, jolloin lauseen 2.3.10 a) nojalla $\mathrm{Null}(A) = \mathrm{Null}(C)$. Olkoot C:n johtavat alkiot kohdissa $(1, j_1)$, $(2, j_2)$, $\ldots$, (r, j_r) $(1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n)$. Merkitään

$$\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{j_1, j_2, \ldots, j_r\} = \{k_1, k_2, \ldots, k_{n-r}\},$$

missä $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_{n-r} \leq n$. $\mathrm{Null}(C)$:n alkiot saadaan 1.5.8 a):sta:

1) Jos $r = n$ (eli $n - r = 0$), vapaita muuttujia ei ole, joten $\mathrm{Null}(C) = \{\mathbf{0}\}$ ja $\dim \mathrm{Null}(C) = 0$.
2) Olkoon $r < n$ (eli $n - r > 0$). Jokaista (parametri-) jonoa $(s_1, s_2, \ldots, s_{n-r})$ vastaa yksikäsitteinen $\mathbf{x} = [\,x_1\ x_2\ \ldots\ x_n\,]^T \in \mathrm{Null}(C)$ niin, että

$$x_{k_1} = s_1, \quad x_{k_2} = s_2, \ \ldots, \ x_{k_{n-r}} = s_{n-r} \quad \text{(vapaat muuttujat)}$$

ja

$$x_{j_h} = d_{h1}s_1 + d_{h2}s_2 + \cdots + d_{h,n-r}s_{n-r} \quad (h = 1, 2, \ldots, r)$$

eräillä $d_{hl} \in \mathbb{R}$. Tällöin ”yleinen ratkaisu” $\mathbf{x}$ on

$$\mathbf{x} = s_1\mathbf{u}_1 + s_2\mathbf{u}_2 + \cdots + s_{n-r}\mathbf{u}_{n-r} \in \mathrm{span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-r}),$$

missä $\mathbf{u}_p \in \mathrm{Null}(C)$ vastaa parametrijonoa $(0, \cdots, 0, \overset{p}{1}, 0 \cdots, 0)$ (siis $s_p = 1$ ja $s_j = 0$, kun $j \neq p$), ts.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_p\text{:n} \quad & k_p\text{-koordinaatti} = 1 \\ & k_q\text{-koordinaatti} = 0, \quad \text{kun } q \neq p \\ & j_h\text{-koordinaatti} = d_{hp}. \end{aligned}$$

Lisäksi jono $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-r})$ on vapaa, sillä lineaarikombinaation $t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 + \cdots + t_{n-r}\mathbf{u}_{n-r}$ k_p-koordinaatti $= t_p = 0$, jos lineaarikombinaatio $= \mathbf{0}$.

On siis johdettu

Lause (ja laskumenetelmä) 2.6.9. $\dim \mathrm{Null}(A) = n - r$. *Jos* $n - r > 0$, *on* $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-r})$ $\mathrm{Null}(A)$*:n (eräs) kanta.* □

Huomautus 2.6.10. Käytännössä vektorit $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-r}$ löytyvät automaattisesti, kun muodostetaan yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ yleinen ratkaisu.

Esimerkki 2.6.11.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{1}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\overset{2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \overset{3}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(*Selitykset*: 1) Riviin 4 lisätään $(-1) \times$ rivi 1, riviin 5 lisätään $(-2) \times$ rivi 1. 2) Riviin 4 lisätään $2 \times$ rivi 2, riviin 5 lisätään rivi 2. 3) Riviin 4 lisätään $(-1) \times$ rivi 3, riviin 5 lisätään rivi 3.)

Havaitaan, että x_3 ja x_5 ovat vapaat muuttujat. Merkitään $x_3 = s_1 \in \mathbb{R}$ ja $x_5 = s_2 \in \mathbb{R}$. Nyt

$$\mathbf{x} \in \mathrm{Null}(A) \iff \begin{cases} x_1 = -x_2 - 4x_3 - x_4 - 2x_5 = -2s_1 - s_2 \\ x_2 = -2x_3 - x_4 - x_5 = -2s_1 + s_2 \\ x_3 = s_1 \\ x_4 = -2x_5 = -2s_2 \\ x_5 = s_2 \end{cases}$$

eli

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2s_1 - s_2 \\ -2s_1 + s_2 \\ s_1 \\ -2s_2 \\ s_2 \end{bmatrix} = s_1 \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_1} + s_2 \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_2}, \quad s_1, s_2 \in \mathbb{R}.$$

Siis $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ on eräs Null(A):n kanta ja $\dim \operatorname{Null}(A) = 2$. □

2.7 MATRIISIN ASTE

Olkoon A $m \times n$-matriisi. Seurauksen 2.6.3 nojalla

$$\dim \operatorname{Col}(A) = \dim \operatorname{Row}(A) = r,$$

missä r on A:n kanssa riviekvivalentin porrasmatriisin nollasta eroavien rivien lukumäärä.

Määritelmä 2.7.1. Matriisin A *aste* on

$$\operatorname{rank}(A) = \dim \operatorname{Col}(A) = \dim \operatorname{Row}(A).$$

Erityisesti $0 \leq \operatorname{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$.

Lauseen 2.6.9 mukaan yo. merkinnöillä on $\dim \operatorname{Null}(A) = n - r$. Siispä

Lause 2.7.2. $\operatorname{rank}(A) + \dim \operatorname{Null}(A) = n$. □

Aste rank(A) voidaan siis määrittää (ainakin) kolmella vaihtoehtoisella tavalla:

(1) etsitään Col(A):lle kanta (2.6.1), tai

(2) etsitään Row(A):lle kanta (2.6.2), tai

(3) etsitään Null(A):lle kanta (2.6.9); $\operatorname{rank}(A) = n - \dim \operatorname{Null}(A)$.

Seuraus 2.7.3. *Homogeenisella yhtälöryhmällä* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *on epätriviaaleja ratkaisuja* $\iff \operatorname{rank}(A) < n$.

Todistus. Epätriviaaleja ratkaisuja on olemassa

$$\begin{aligned} &\iff \operatorname{Null}(A) \neq \{\mathbf{0}\} \\ &\iff \dim \operatorname{Null}(A) > 0 \\ &\iff \operatorname{rank}(A) = n - \dim \operatorname{Null}(A) < n. \quad \square \end{aligned}$$

Neliömatriisille pätee

Lause 2.7.4. *Olkoon* A $n \times n$*-matriisi. Silloin* $\operatorname{rank}(A) \leq n$*. Lisäksi* $\operatorname{rank}(A) = n$ $\iff$ A *on säännöllinen.*

Todistus. Kuten todettiin, $\operatorname{rank}(A) \leq \min\{n, n\} = n$. Edelleen

$$\begin{aligned}
&A \text{ on säännöllinen}\\
&\overset{1.6.5}{\iff} \text{homogeenisella yhtälöryhmällä } A\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ on vain triviaali ratkaisu}\\
&\overset{2.7.3}{\iff} \operatorname{rank}(A) \geq n \iff \operatorname{rank}(A) = n. \quad \square
\end{aligned}$$

Olkoon A $m \times n$-matriisi, jonka sarakkeet ovat $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$, ja olkoon $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Verrataan A:n ja täydennetyn matriisin $[\,A \,\vdots\, \mathbf{b}\,]$ asteita. Koska

$$\operatorname{Col}(A) = \operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \subset \operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}) = \operatorname{Col}([\,A \,\vdots\, \mathbf{b}\,])$$

on

$$\operatorname{rank}([\,A \,\vdots\, \mathbf{b}\,]) = \begin{cases} \operatorname{rank}(A), & \text{kun } \mathbf{b} \in \operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \\ \operatorname{rank}(A) + 1, & \text{kun } \mathbf{b} \notin \operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n). \end{cases}$$

Siis pätee

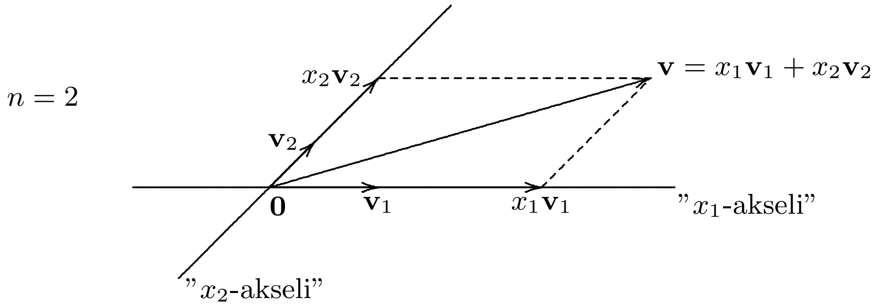
Lause 2.7.5. *Yhtälöryhmällä* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *on ratkaisuja*
$\iff \operatorname{rank}([\,A \,\vdots\, \mathbf{b}\,]) = \operatorname{rank}(A)$. $\square$

2.8 KOORDINAATIT JA KANNANVAIHTO

Olkoon V vektoriavaruus, $\dim(V) = n$. Jos $S = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ on V:n kanta ja $\mathbf{v} \in V$, on olemassa yksikäsitteinen sarakevektori

$$[\mathbf{v}]_S = [\,x_1 \quad \ldots \quad x_n\,]^T \in \mathbb{R}^n, \quad \text{jolla} \quad \mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n.$$

Sarakevektoria $[\mathbf{v}]_S$ kutsutaan $\mathbf{v}$:n koordinaattivektoriksi S:n suhteen (ks. s. 48), ja luvut $x_1, \ldots, x_n$ ovat $\mathbf{v}$:n *koordinaatit* kannassa S.



Esimerkki 2.8.1. a) $[\mathbf{v}_j]_S = \mathbf{e}_j = [\,0 \quad \cdots \quad 0 \quad \overset{j}{1} \quad 0 \quad \cdots \quad 0\,]^T$ kaikilla j.
b) Olkoon $E = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ $\mathbb{R}^n$:n luonnollinen kanta. Silloin

$$[\mathbf{x}]_E = \mathbf{x} \quad \text{kaikilla } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n).$$

Lause 2.8.2. *Olkoot* $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ *ja* $c \in \mathbb{R}$, *ja olkoon* $S = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ V*:n kanta. Tällöin*

$$[\mathbf{v} + \mathbf{w}]_S = [\mathbf{v}]_S + [\mathbf{w}]_S \quad \textit{ja} \quad [c\mathbf{v}]_S = c[\mathbf{v}]_S.$$

Todistus. Olkoon $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n$ ja $\mathbf{w} = y_1\mathbf{v}_1 + \cdots + y_n\mathbf{v}_n$. Tällöin

$$\mathbf{v}+\mathbf{w} = (x_1\mathbf{v}_1+\cdots+x_n\mathbf{v}_n)+(y_1\mathbf{v}_1+\cdots+y_n\mathbf{v}_n) = (x_1+y_1)\mathbf{v}_1+\cdots+(x_n+y_n)\mathbf{v}_n,$$

joten

$$\begin{aligned}[\mathbf{v} + \mathbf{w}]_S &= [\,x_1 + y_1 \quad \ldots \quad x_n + y_n\,]^T \\ &= [\,x_1 \quad \ldots \quad x_n\,]^T + [\,y_1 \quad \ldots \quad y_n\,]^T = [\mathbf{v}]_S + [\mathbf{w}]_S.\end{aligned}$$

Vastaavasti

$$c\mathbf{v} = c(x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n) = (cx_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (cx_n)\mathbf{v}_n,$$

joten

$$[c\mathbf{v}]_S = [\,cx_1 \quad \ldots \quad cx_n\,]^T = c\,[\,x_1 \quad \ldots \quad x_n\,]^T = c[\mathbf{v}]_S. \quad \square$$

Jos $n > 0$, tarkasteltavalla n-ulotteisella vektoriavaruudella V on aina lukuisia eri kantoja, ja yleensä (toisin kuin koordinaattiavaruuden $\mathbb{R}^n$ tapauksessa) mikään V:n kanta ei ole muita kantoja "luonnollisempi" (näin on jo, jos V on $\mathbb{R}^m$:n jokin aito aliavaruus). Tietty V:n vektori voidaan esittää koordinaattivektorin avulla jokaisen kannan suhteen, mutta tuo koordinaattivektori tietenkin riippuu siitä, mitä nimenomaista kantaa käytetään. Tämän takia on syytä tutkia, miten saman vektorin koordinaattivektori muuttuu, kun käytettävä kanta vaihtuu.

Olkoot siis $S = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ ja $T = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)$ kaksi V:n kantaa. Selvitämme, miten vektorin $\mathbf{v} \in V$ koordinaattivektorit $[\mathbf{v}]_S$ ja $[\mathbf{v}]_T$ riippuvat toisistaan.

Olkoon $[\mathbf{w}_j]_S = [\,a_{1j} \quad a_{2j} \quad \ldots \quad a_{nj}\,]^T$, $j = 1, 2, \ldots, n$, toisin sanoen

$$\mathbf{w}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{v}_i = a_{1j}\mathbf{v}_1 + a_{2j}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{nj}\mathbf{v}_n, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.8.3}$$

Lause ja määritelmä 2.8.4. *On olemassa tasan yksi* $n \times n$ *-matriisi* $M(S \leftarrow T)$*, kannanvaihtomatriisi* T*:stä* S*:ään, jolla*

$$[\mathbf{v}]_S = M(S \leftarrow T)[\mathbf{v}]_T \quad \forall\, \mathbf{v} \in V,$$

nimittäin $M(S \leftarrow T) = [\, a_{ij} \,] = [\, [\mathbf{w}_1]_S \quad [\mathbf{w}_2]_S \quad \dots \quad [\mathbf{w}_n]_S \,]$ *(sarakkeet* $[\mathbf{w}_1]_S$*,* $[\mathbf{w}_2]_S, \dots, [\mathbf{w}_n]_S$*).*

Todistus. Yksikäsitteisyys: Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sellainen, että $A[\mathbf{v}]_T = [\mathbf{v}]_S \,\forall\, \mathbf{v} \in V$. Silloin

$$A\text{:n } j\text{:s sarake} = A\mathbf{e}_j = A[\mathbf{w}_j]_T = [\mathbf{w}_j]_S,$$

joka on yksikäsitteisesti määrätty.

Olemassaolo: Määritellään $M(S \leftarrow T) = [\, [\mathbf{w}_1]_S \quad [\mathbf{w}_2]_S \quad \dots \quad [\mathbf{w}_n]_S \,]$. Olkoon $\mathbf{v} \in V$ ja $[\mathbf{v}]_T = \mathbf{x} = [\, x_1 \quad \dots \quad x_n \,]^T$, ts. $\mathbf{v} = x_1\mathbf{w}_1 + \dots + x_n\mathbf{w}_n$. Silloin

$$\begin{aligned} M(S \leftarrow T)[\mathbf{v}]_T &= M(S \leftarrow T)\,[\, x_1 \quad \dots \quad x_n \,]^T \\ &= x_1[\mathbf{w}_1]_S + \dots + x_n[\mathbf{w}_n]_S \underset{2.8.2}{=} [x_1\mathbf{w}_1 + \cdots x_n\mathbf{w}_n]_S = [\mathbf{v}]_S. \quad \square \end{aligned}$$

Kun $\mathbf{v} \in V$, $[\mathbf{v}]_T = [\, x_1 \quad \dots \quad x_n \,]^T$ ja $[\mathbf{v}]_S = [\, y_1 \quad \dots \quad y_n \,]^T$, on siis $[\mathbf{v}]_S = M(S \leftarrow T)[\mathbf{v}]_T$, eli

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n, \quad i = 1, \dots, n \tag{2.8.5}$$

(vertaa tätä 2.8.3:een).

Lause 2.8.6. *Olkoot* R*,* S *ja* T *kolme* V*:n kantaa. Silloin*

a) $M(S \leftarrow S) = I_n$*;*

b) $M(R \leftarrow S)M(S \leftarrow T) = M(R \leftarrow T)$*;*

c) $M(S \leftarrow T)$ *on säännöllinen ja* $M(S \leftarrow T)^{-1} = M(T \leftarrow S)$

Todistus. a) Koska $[\mathbf{v}]_S = I_n[\mathbf{v}]_S \;\forall \mathbf{v} \in V$ ja kannanvaihtomatriisi on yksikäsitteinen, on $M(S \leftarrow S) = I_n$.

b) Soveltamalla aluksi matriisien kertolaskun liitäntälakia ja sen jälkeen kannanvaihtomatriisin määritelmää saadaan kaikilla $\mathbf{v} \in V$

$$\begin{aligned} (M(R \leftarrow S)M(S \leftarrow T))[\mathbf{v}]_T &= M(R \leftarrow S)(M(S \leftarrow T)[\mathbf{v}]_T) \\ &= M(R \leftarrow S)[\mathbf{v}]_S = [\mathbf{v}]_R = M(R \leftarrow T)[\mathbf{v}]_T. \end{aligned}$$

Kannanvaihtomatriisin yksikäsitteisyyden nojalla on

$$M(R \leftarrow S)M(S \leftarrow T) = M(R \leftarrow T).$$

c) Kohtien b) ja a) nojalla

$$\begin{aligned} &M(S \leftarrow T)M(T \leftarrow S) = M(S \leftarrow S) = I_n \quad \text{ja} \\ &M(T \leftarrow S)M(S \leftarrow T) = I_n. \quad \square \end{aligned}$$

Kannanvaihto käytännössä $\mathbb{R}^n$:ssä.

Olkoon $E = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ koordinaattiavaruuden $\mathbb{R}^n$:n luonnollinen kanta. Kun $S = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ on $\mathbb{R}^n$:n toinen kanta, merkitään

$$M_S = M(E \leftarrow S) = [\,\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{v}_n\,] \quad (\text{sarakkeet } \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$$

(ks. 2.8.4; $\mathbf{v}_j = [\mathbf{v}_j]_E \ \forall j$, ks. 2.8.1 b); siis M_S on triviaali muodostaa.

Kun $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, on $[\mathbf{b}]_S = \mathbf{x}$ yhtälöryhmän $M_S\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yksikäsitteinen ratkaisu, sillä lauseen 2.8.4 nojalla

$$M_S[\mathbf{b}]_S = M(E \leftarrow S)[\mathbf{b}]_S = [\mathbf{b}]_E = \mathbf{b},$$

ja ratkaisun yksikäsitteisyys seuraa siitä, että M_S on säännöllinen. Yhtälöryhmä voidaan ratkaista kuten 1.5:ssä.

Toinen tapa $[\mathbf{b}]_S$:n laskemiseksi on soveltaa lauseita 2.8.4 ja 2.8.6 c):

$$[\mathbf{b}]_S = M(S \leftarrow E)\mathbf{b} = M(E \leftarrow S)^{-1}\mathbf{b} = M_S^{-1}\mathbf{b},$$

missä M_S^{-1} löytyy kuten menetelmässä 1.6.7.

Olkoon myös $T = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n)$ $\mathbb{R}^n$:n kanta. Lauseen 2.8.6 b) nojalla

$$M(S \leftarrow T) = M(S \leftarrow E)M(E \leftarrow T) = M_S^{-1}M_T$$

saadaan, kun on löydetty M_S^{-1}.

Toinen, usein suositeltavampi, tapa matriisin

$$M(S \leftarrow T) = [\,[\mathbf{w}_1]_S \quad \ldots \quad [\mathbf{w}_n]_S\,]$$

muodostamiseksi: Sarake $[\mathbf{w}_j]_S = \mathbf{x}$ on yhtälöryhmän $M_S\mathbf{x} = \mathbf{w}_j$ yksikäsitteinen ratkaisu, ja nämä n yhtälöryhmää ($j = 1, \ldots, n$) voidaan ratkaista yhdellä kertaa; kun $n \times (2n)$ - matriisi

$$[\,M_S \,\vdots\, M_T\,] = [\,\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \ldots\ \mathbf{v}_n \,\vdots\, \mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2\ \ldots\ \mathbf{w}_n\,],$$

jonka sarakkeet ovat $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$, muunnetaan redusoituun porrasmuotoon $[\,I_n \,\vdots\, B\,]$, on $B = M(S \leftarrow T)$.

Esimerkki 2.8.7. Olkoon $\mathbf{v}_1 = [1 \quad 1]^T$, $\mathbf{v}_2 = [1 \quad -1]^T$, $\mathbf{w}_1 = [1 \quad -2]^T$ ja $\mathbf{w}_2 = [2 \quad 3]^T$. Tällöin $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ ja $T = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ ovat kaksi $\mathbb{R}^2$ kantaa (miksi?). Triviaalisti

$$M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad M_T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Olkoon $\mathbf{b} = [4 \quad -5]^T \in \mathbb{R}^2$. Ratkaistaan $\mathbf{x} = [\mathbf{b}]_S$ ja $\mathbf{y} = [\mathbf{b}]_T$ yhtälöryhmistä $M_S\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ja $M_T\mathbf{y} = \mathbf{b}$:

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -5 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -9 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{9}{2} \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{9}{2} \end{array}\right].$$

Siis

$$[\mathbf{b}]_S = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix} \qquad \text{(tarkista laskemalla } (-\frac{1}{2})\mathbf{v}_1 + \frac{9}{2}\mathbf{v}_2).$$

Edelleen

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & 3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & \frac{22}{7} \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} \end{array}\right].$$

Siis

$$[\mathbf{b}]_T = \begin{bmatrix} \frac{22}{7} \\ \frac{3}{7} \end{bmatrix} \qquad \text{(tarkista laskemalla } \frac{22}{7}\mathbf{w}_1 + \frac{3}{7}\mathbf{w}_2).$$

Edelleen

$$[\,M_S \,\vdots\, M_T\,] = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Siis

$$M(S \leftarrow T) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Totea laskemalla, että todellakin

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{22}{7} \\ \frac{3}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix} \quad \text{eli} \quad M(S \leftarrow T)[\mathbf{b}]_T = [\mathbf{b}]_S.$$