Topologia I
Harjoitus 7
16.3. - 20.3. 2009

1. Olkoon $(X, d)$ metrinen avaruus ja $A \subset X$ osajoukko. Näytä:
(i) $A$ on avoin $X$:ssä jos ja vain jos $A \cap \partial A = \emptyset$,
(ii) $A$ on suljettu $X$:ssä jos ja vain jos $\partial A \subset A$.

2. (8:2) Olkoon $X = \mathbb{R}^2$ ja $A = \{(x, y) : xy \geq 0, x \geq 0, |y| < 1\}$. Määritä joukot $int(A)$, $\partial A$ ja $\overline{A}$. Ratkaisussa voit nojautua sopiviin kuviin.

3. (8:5) Olkoon $(X, d)$ metrinen avarus ja $A \subset X$ osajoukko. Näytä, että $\partial(\partial A) \subset \partial A$. Totea, että tapauksessa $A = \mathbb{Q}$ (rationaaliluvut) ja $X = \mathbb{R}$ pätee $\partial(\partial A) \neq \partial A$. [Muista: reuna $\partial\mathbb{Q}$ määrättiin luennoilla.]

4. (9:1) Todista, että $]-\infty, a[\ \approx \mathbb{R} \approx\ ]a, \infty[$ kun $a \in \mathbb{R}$.

5. (9:4) Olkoon $f : X \to Y$ homeomorfismi ja $A \subset X$. Näytä, että $f[\overline{A}] = \overline{fA}$ ja $f[\partial A] = \partial f A$.

6. (4:10) Olkoon $\Delta \subset \mathbb{R}$ väli (mahdollisesti rajaton) ja $f : \Delta \to \mathbb{R}$ jatkuva injektio. Todista, että $f$ on aidosti kasvava tai aidosti vähenevä. *Ohje.* Tee vastaoletus ja sovella Bolzanon lausetta Analyysin kurssilta.

**Muistutus:** (Bolzano) Jos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva kuvaus ja $f(a), f(b)$ ovat erimerkkiset, niin on olemassa sellainen luku $c \in\ ]a, b[$ että $f(c) = 0$. (Seuraus) Jos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva kuvaus, niin $f$ saa kaikki lukujen $f(a)$ ja $f(b)$ välissä olevat arvot.