

Topologia I
Harjoitus 5
16.2.-20.2. 2009

- (6:1) Onko joukko $A \subset \mathbb{R}^2$ suljettu (euklidisessa metriikassa), kun (a) $A = \{(x, y) : x < 1\}$, (b) $A = \{(x, y) : y = x^2\}$, (c) $A = \{(x, y) : x \neq 0, |y| \leq |x|\}$? Määritä sulkeuma \overline{A} , jos A ei ole suljettu joukko.
- (6:2) Näytä, että rationaalilukujen joukon \mathbb{Q} sulkeuma $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ (tavallisen metriikan suhteen). *Muistutus:* kurssin Analyysi I nojalla aina jos $x, y \in \mathbb{R}$ ja $x < y$, niin on olemassa sellainen $q \in \mathbb{Q}$ että $x < q < y$.
- (6:5) Olkoot A ja B suljettuja joukkoja \mathbb{R} :ssä. Osoita, että karteeminen tulojoukko $A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$ on suljettu tasossa \mathbb{R}^2 . *Muistutus:* Projektiokuvaukset P_1 ja P_2 , sekä monisteen lause 6.13.
- (6:14) Määritä joukon $A \subset \mathbb{R}^2$ kasautumispisteet, kun (a) $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$, (b) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, (c) $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$.
- (6:15) Olkoon X ja Y metrisiä avaruuksia sekä $f : X \rightarrow Y$ kuvaus. Osoita, että f on jatkuva X :ssä jos ja vain jos $f^{-1}\overline{B} \subset \overline{f^{-1}B}$ kaikilla $B \subset Y$. *Vihje:* Monisteen lauseista 6.8, 6.12 ja 6.13 on apua.
- (6:18 ja 6:19) Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Osoita, että jokainen suljettu joukko $F \subset X$ voidaan lausua leikkauksena jonosta avoimia joukkoja $U_1 \supset U_2 \supset \dots$, ja jokainen avoin joukko $U \subset X$ yhdisteenä jonosta suljettuja joukkoja $F_1 \subset F_2 \subset \dots$. *Vihje.* Valitse $U_n = \{x \in X : d(x, F) < \frac{1}{n}\}$ kun $n \in \mathbb{N}$. Jälkimmäisessä tapauksessa siirry komplementteihin.

Muista: Kurssin ensimmäinen kurssikoe on tiistaina 24.2 klo 13-15.

Koealue: monisteen luvut 0 - 6 (sivut 6 - 53). Kertausta ja vanhoja koeteh-
täviä ke 18.2. klo 11 - 12.

Huom.: Kurssin 2. jakso alkaa ma 9.3. Viikolla 11 (9.3. - 13.3.) on las-
kuharjoituksia. Tehtävät ilmestyvät viikolla 10 keskiviikkoon 4.3. mennessä
huoneeseen C127 sekä nettiin.