Topologia I
Harjoitus 1
19.1.-23.1. 2009

1. Olkoon $A_t = [t, 3t] = \{x \in \mathbb{R} : t \leq x \leq 3t\}$ kaikilla $t > 0$. Määrää $\bigcup_{t>0} A_t$ ja $\bigcap_{t>0} A_t$. Perustele!

2. Olkoot X, Y joukkoja ja $f : X \to Y$ kuvaus. Näytä:
(i) $f^{-1}[\cup_{j\in J} B_j] = \cup_{j\in J} f^{-1}B_j$, kun $B_j \subset Y$ kaikilla $j \in J$.
(ii) $f[A_1 \cap A_2] \subset fA_1 \cap fA_2$ kun $A_1, A_2 \subset X$. Etsi esimerkki kuvauksesta $f : X \to Y$ ja osajoukoista A_1, A_2, joille $f[A_1 \cap A_2] \neq fA_1 \cap fA_2$.

3. Olkoot X, Y joukkoja, $f : X \to Y$ kuvaus sekä $A \subset X$, $B \subset Y$ osajoukkoja. Näytä:
(i) $A \subset f^{-1}[fA]$, (ii) $f[f^{-1}B] \subset B$.
Etsi kohdissa (i) ja (ii) esimerkki kuvauksesta f ja osajoukoista A, B, joille $A \neq f^{-1}[fA]$ ja $B \neq f[f^{-1}B]$.

4. (1:2) Todista, että kaava

$$f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

määrittelee sisätulon avaruudessa $C[0, 1]$.

5. Tutki, määritteleekö kaava

$$x \cdot y = x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1, \quad x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3,$$

sisätulon avaruudessa $\mathbb{R}^3$?

6. (1:5) Todista, että $|x|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$, kun $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on normi avaruudessa $\mathbb{R}^n$.

Suoritetuista laskuharjoitustehtävistä saa lisäpisteitä: 25% +1p 35% +2p 45% +3p 55% +4p 65% +5p 75% +6p

Kurssin luentopäiväkirjassa (linkki kurssisivulta) on lista luennoilla käsiteltyistä aiheista.