MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Ohjaus 8
Mallit (Ansku)

1. Tarkastellaan funktioita $f_n(x) = x^n$ välillä $]0,1[$.

(a) Miten voidaan perustella, että kaikilla $x \in]0,1[$ pätee $f_n(x) \to 0$ kun $n \to \infty$? (Vihje: Bernoullin epäyhtälö.)

(b) Edellisen kohdan nojalla tiedetään, että kaikilla $x \in]0,1[$ on olemassa sellainen K_x, että kaikilla $n > K_x$ on pätee $f_n(x) < 10^{-100}$. Miten K_x riippuu kohdasta x? (Voit tutkia esimerkiksi lausekkeen

$$-100\frac{\ln 10}{\ln x}$$

käyttäytymistä kun $x \in]0,1[$.)

Ratkaisu.

(a) Bernoullin epäyhtälö: $(1+x)^n \geq 1 + nx$, kun $x > -1$.

Koska $x \in]0,1[$, niin voidaan kirjoittaa $x = \frac{1}{y}$, kun $y > 1$. Keksitään vielä kirjoittaa $y = 1 + z$, missä $z > 0$. Nyt siis $x = \frac{1}{1+z}$. Lasketaan ja käytetään Bernoullin epäyhtälöä nimittäjään:

$$|f_n(x) - 0| = |x^n| = (\frac{1}{1+z})^n = \frac{1}{(1+z)^n} \leq \frac{1}{1+nz} \to 0,$$

kun $n \to \infty$.

(b) Tehtävän lauseke on saatu näin: $f_n(x) < 10^{-100}$ eli $x^n < 10^{-100}$. Ratkaistaan n:

$$x^n < 10^{-100} \Leftrightarrow \ln x^n < \ln 10^{-100} \Leftrightarrow n \ln x < -100 \ln 10 \Leftrightarrow n > -100\frac{\ln 10}{\ln x}.$$

Koska ln on kasvava funktio, voidaan tarkastella lausekkeen käyttäytmistä lähellä välien päätepisteitä. Kun $x \to 0, -100\frac{\ln 10}{\ln x} \to 0$. Kun $x \to 1, -100\frac{\ln 10}{\ln x} \to \infty$. Siis kuten ehkä jo luennoilta muistetaan, funktion x^n suppeneminen on tasaista lähellä nollaa eli n voidaan valita aika pieneksi. Lähellä ykköstä päinvastoin.

2. Määritellään $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$ kun $n = 1, 2, \ldots$ Hahmottele kuva. Suppeneeko jono $f_1, f_2, \ldots$ tasaisesti?

Ratkaisu. Kuvan voi hahmotella vaikka graafisella laskimella, esim. piirtämällä $f_1 = \sin x$, $f_2 = \frac{1}{2}\sin(2x)$ ja $f_3 = \frac{1}{3}\sin(3x)$.

Tarkastellaan funktiojonon suppenemista. $\frac{1}{n}\sin(nx) \to 0$, kun $n \to \infty$, joten rajafunktio $f(x) = 0$ kaikilla x.

$$|f_n(x) - f(x)| = |\frac{1}{n}\sin(nx) - 0| = |\frac{1}{n}|\,|\sin(nx)| \leq \frac{1}{n}.$$

Epäyhtälö saatiin, koska $|\sin x| \leq 1$ kaikilla x. Löydettiin siis luvusta x riippumaton yläraja erotukselle, joten $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx) \to 0$ tasaisesti.

3. Laske

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2+n^2}}\,dx.$$

Käytä tasaista suppenemista (tarkista se!)

Ratkaisu. Merkitään intergoitavia funktioita $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2+n^2}}$ ja etsitään rajafunktio $f(x)$:

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2+n^2}} \to \sqrt{x^2} = |x| = f(x),$$

kun $n \to \infty$. Jos $f_n(x) \to f(x)$ tasaisesti, niin intergraali voidaan laskea helposti

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2+n^2}}\,dx = \int_{-1}^{1}|x|\,dx.$$

Tarkistetaan tasainen suppeneminen. Tässä kannattaa kirjoittaa $f(x)$ muodossa $\sqrt{x^2}$, jotta voidaan käyttää lavennustemppua (lavennetaan molempien juurilausekkeiden summalla).

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= |\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2+n^2}} - \sqrt{x^2}| \\
&= |\frac{\frac{1}{x^2+n^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2+n^2}} + \sqrt{x^2}}| \\
&\overset{\star}{\leq} \frac{1}{x^2+n^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}}} \\
&= \frac{n}{x^2+n^2} \\
&\leq \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Kohdassa $\star$ on ensin arvioitu juurilausekkeen alta kaikki luvut x pois. Näin saadaan tehdä, koska $x^2 \geq 0$, ja nimittäjää pienentämällä kasvatetaan lauseketta. Samoin tehdään viimeinen arvio. Löydettiin (huh huh...) taas erotukselle luvusta x riippumaton yläraja, joten suppeneminen on tasaista. Siis

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2+n^2}}\,dx = \int_{-1}^{1}|x|\,dx = \int_{-1}^{0}-x\,dx + \int_{0}^{1}x\,dx = 2.$$

4. Oletetaan, että $f_n : \Delta \to \mathbb{R}$ ja $f : \Delta \to \mathbb{R}$ ja että $f_n \to f$ tasaisesti, kun $n \to \infty$. Osoita, että $f_n \to f$ pisteittäin, kun $n \to \infty$.

Ratkaisu. Kerrataan määritelmät:

Funktiojono $f_n(x) \to f(x)$ pisteittäin välillä Δ, jos kaikilla $\epsilon > 0$ ja kaikilla $x \in \Delta$ on olemassa $n_{\epsilon,x}$ niin, että $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ kaikilla $n > n_{\epsilon,x}$.

Funktiojono $f_n(x) \to f(x)$ tasaisesti välillä Δ, jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa n_ϵ niin, että $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ kaikilla $x \in \Delta$ ja kaikilla $n > n_\epsilon$.

Oletetaan, että $f_n(x) \to f(x)$ tasaisesti välillä Δ. Pisteittäinen suppeneminen seuraa suoraan tasaisen suppenemisen määritelmästä, kun valitaan $n_{\epsilon,x} = n_\epsilon$ kaikilla $x \in \Delta$.

Vähän selittelyä: Halutaan osoittaa, että $f_n(x) \to f(x)$ pisteittäin välillä Δ eli että tietyllä $\epsilon > 0$ kaikilla $x \in \Delta$ on olemassa joku (ei välttämättä sama) indeksi $n_{\epsilon,x}$... Tasaisen suppenemisen määritelmä sanoo, että tällä funktiojonolla ja tällä $\epsilon > 0$ on olemassa joku indeksi n_ϵ, joka on kaikille $x \in \Delta$ sama.