MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Ohjaus 7
16.3.2009 alkavalle viikolle
Ratkaisuehdotuksia
Sauli Lindberg

1. Ovatko seuraavat tosia kaikille suppeneville positiivitermisille sarjoille $\sum x_k$?
(a) Sarja $\sum (x_k)^2$ suppenee.
(b) Sarja $\sum \sqrt{x_k}$ suppenee.

(a):n ratkaisu. Koska sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee, niin $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ (Lause III.1.5). On siis olemassa sellainen $k_0 \in \mathbb{N}$, että $x_k < 1$ kaikilla $k > k_0$. Siis kaikilla $k > k_0$ pätee

$$x_k^2 = x_k \cdot x_k \leq 1 \cdot x_k = x_k.$$

Kun merkitään

$$M = \max_{1\leq k\leq k_0} x_k \geq 0,$$

saadaan kaikilla $k = 1, 2, \ldots, k_0$ epäyhtälö

$$x_k^2 = x_k \cdot x_k \leq M x_k.$$

Siis kaikilla $k \in \mathbb{N}$ on voimassa arvio $x_k^2 \leq (M+1)x_k$. Koska sarja $\sum_{k=1}^{\infty}(M+1)x_k$ suppenee, niin Majoranttiperiaatteen (lause III.2.2) nojalla myös sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ suppenee. □

(a):n toinen ratkaisu. Koska sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee, niin sen osasummien jono on ylhäältä rajoitettu (Lause III.2.1) eli on olemassa sellainen $N > 0$, että

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \leq N$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Nyt kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee $x_n \leq \sum_{k=1}^{n} x_k \leq N$ ja sen seurauksena $x_n^2 \leq N x_n$. Koska sarja $\sum_{k=1}^{\infty} N x_k$ suppenee (Lause III.1.9), niin Majoranttiperiaatteen nojalla myös $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ suppenee. □

(b):n ratkaisu. Sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{x_k}$ ei tarvitse supeta vaikka $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenisikin. Voidaan valita esimerkiksi

$$x_k = \frac{1}{k^2} \quad \text{kaikilla } k \in \mathbb{N},$$

jolloin

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

suppenee mutta

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{x_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

hajaantuu.

□

2. Suppeneeko vai hajaantuuko sarja?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k!}}.$$

Minorantti/majoranttiperiaate...

Ratkaisu. Kiinnitetään $k \in \mathbb{N}$. Tällöin saadaan (induktiolla)

$$\begin{aligned} k! &= 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k \\ &\leq k \cdot k \cdot ... \cdot k = k^k. \end{aligned}$$

Siis

$$\sqrt[k]{k!} \leq \sqrt[k]{k^k} = (k^k)^{\frac{1}{k}} = k,$$

joten

$$0 \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{\sqrt[k]{k!}}.$$

Voimme siis soveltaa Minoranttiperiaatetta (Lause III.2.2) sarjoihin

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k!}} \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Koska harmoninen sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ hajaantuu, niin myös sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k!}}$ hajaantuu. □

3. Suppeneeko vai hajaantuuko sarja?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[42]{k!}}.$$

Suhdetesti...

Palautetaan mieleen Suhdetestin ensimmäinen osa (Lause III.2.6 a):

Jos $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ *ja vakio* $q < 1$ *s.e.*

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} \leq q \quad \textit{kaikilla } k \geq k_0,$$

niin $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *suppenee.*

Ratkaisu. Kaikilla $k \in \mathbb{N}$ saadaan

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{1/\sqrt[42]{(k+1)!}}{1/\sqrt[42]{k!}} = \frac{\sqrt[42]{k!}}{\sqrt[42]{(k+1)!}} = \sqrt[42]{\frac{k!}{(k+1)!}} = \frac{1}{\sqrt[42]{k+1}}.$$

Siis kaikilla $k \geq 1$ pätee

$$k+1 \geq 2 \implies \sqrt[42]{k+1} \geq \sqrt[42]{2} \implies \frac{1}{\sqrt[42]{k+1}} \leq \frac{1}{\sqrt[42]{2}} < 1.$$

Valitaan $k_0 = 1$ ja $q = 1/\sqrt[42]{2}$, jolloin Suhdetestin nojalla $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[42]{k!}}$ suppenee.

□

4. Oletetaan, että positiivitermiset sarjat $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ suppenevat. Osoita, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{x_k y_k}$$

suppenee. Erotuksen neliön kaavasta on apua. Osoita tämän tuloksen avulla, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x_k}}{k}$$

suppenee, jos $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee.

Ratkaisu. Kun $a, b \in \mathbb{R}$, erotuksen neliön kaava kertoo, että

$$\begin{aligned} & a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geq 0 \\ \implies & 2ab \leq a^2 + b^2 \\ \implies & ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}. \end{aligned}$$

Kun $k \in \mathbb{N}$, asetetaan $a = \sqrt{x_k}$ ja $b = \sqrt{y_k}$, jolloin $a^2 = x_k$ ja $b^2 = y_k$ ja saadaan arvio

$$\sqrt{x_k y_k} = \sqrt{x_k}\sqrt{y_k} \leq \frac{x_k + y_k}{2}.$$

Koska sarjat $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ suppenevat, niin sarja $\sum_{k=1}^{\infty}(x_k+y_k)/2$ suppenee (Lause III.1.9). Majoranttiperiaatteen nojalla myös $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{x_k y_k}$ suppenee.

Määritellään positiiviterminen sarja $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ asettamalla $y_k = \dfrac{1}{k^2}$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Tällöin kaikilla $k \in \mathbb{N}$ pätee $\dfrac{\sqrt{x_k}}{k} = \sqrt{x_k y_k}$ ja sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

suppenee, joten edellä todistetun väitteen nojalla sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x_k}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{x_k y_k}$$

suppenee. $\square$