MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Ohjaus 5
16 . 2. 2009 alkavalle viikolle
Mallit (Ansku)

1. Suppeneeko

$$\int_0^1 (\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{1-x})\,dx?$$

Ratkaisu. Tehtävän intergaali on epäoleellinen sekä ala- että ylärajalla, joten se täytyy jakaa kahteen osaan. "Katkaisukohdaksi" voidaan valita mikä tahansa piste väliltä $]0,1[$. Valitaan vaikka piste $x = \frac{1}{2}$. Nyt

$$\int_0^1 (\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{1-x})\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{1-x})\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{1-x})\,dx.$$

Merkitään tätä summaa $I = I_1 + I_2$. Tarkastellaan ensin integraalia I_2, joka on epäoleellinen ylärajalla. Olkoon $a \in]\frac{1}{2}, 1[$.

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^a (\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{1-x})\,dx &= \Big/_{\frac{1}{2}}^{a} (4\sqrt{x} - 3\ln\,(1-x)) \\ &= (4\sqrt{a} - 3\ln\,(1-a)) - (4\sqrt{\frac{1}{2}} - 3\ln\,(1-\frac{1}{2})) \to \infty\,,\end{aligned}$$

kun a $\to 1$ (koska $\ln(1-a) \to -\infty$, kun $a \to 0$). Siis integraali I_2 hajaantuu. Tästä seuraa, että intergaali I hajaantuu. (Jotta I suppenisi, molempien integraalien I_1 ja I_2 tulisi supeta.)

2. Millä $s > 0$ suppenee

$$\int_0^\infty \frac{e^{\sin x}}{x^s}\,dx?$$

Ratkaisu. Arvioidaan ensin integroitavaa funktiota. Koska $-1 \le \sin x \le 1$ kaikilla x, niin

$$\frac{e^{-1}}{x^s} \le \frac{e^{\sin x}}{x^s} \le \frac{e^1}{x^s}$$

kaikilla $x \in [0, \infty[$.

Tarkastellaan integraalia $\int_0^\infty \frac{e^{-1}}{x^s}\,dx$. Se on epäoleellinen sekä ala- että ylärajalla, joten (kuten tehtävässä 1) intergaali täytyy jakaa kahteen osaan. Tiedetään myös esimerkkien II.1.2 ja II.1.8 perusteella, että integraali $\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx$

suppenee, kun $s < 1$, ja intergaali $\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx$ suppenee, kun $s > 1$. Siksi valitaan "katkaisupisteeksi" $x = 1$ ja kirjoitetaan integraali muodossa

$$\int_0^\infty \frac{e^{-1}}{x^s}\,dx = \frac{1}{e}\int_0^\infty \frac{1}{x^s}\,dx = \frac{1}{e}\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx + \frac{1}{e}\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx.$$

Kun $s < 1$, integraali $\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx$ suppenee, mutta $\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx$ hajaantuu.

Kun $s > 1$, integraali $\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx$ suppenee, mutta $\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx$ hajaantuu.

Kun $s = 1$, intergaali $\int_0^\infty \frac{1}{x^s}\,dx$ hajaantuu, koska

$$\int_a^1 \frac{1}{x}\,dx = \Big/_{\!a}^{1} \ln x = \ln 1 - \ln a \to \infty, \text{ kun } a \to 0, \text{ ja}$$

$$\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \Big/_{\!1}^{b} \ln x = \ln b - \ln 1 \to \infty, \text{ kun } b \to \infty.$$

Nyt siis kaikilla $s > 0$ ainakin jompi kumpi integraaleista $\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx$ ja $\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx$ hajaantuu, joten $\frac{1}{e}\int_0^\infty \frac{1}{x^s}\,dx$ hajaantuu. Minoranttiperiaatteen nojalla siis myös integraali $\int_0^\infty \frac{e^{\sin x}}{x^s}\,dx$ hajaatuuu kaikilla $s > 0$.

3. Suppeneeko

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x}}\,dx?$$

Vihje: itseinen suppeneminen...

Ratkaisu. Tässä ei itse asiassa tarvita itseistä suppenemista. Harjoitellaan sitä kuitenkin... Koska $|\cos x| \leq 1$ kaikilla x, niin

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x}}\,dx \leq \int_0^1 \left|\frac{\cos x}{\sqrt{1-x}}\right|\,dx = \int_0^1 \frac{|\cos x|}{\sqrt{1-x}}\,dx \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx.$$

Löydettiin majorantti tehtävän intergaalille, ja tämä majorantti suppenee, mikä on osoitettu edellisen viikon ohjauksissa. Kertauksena:

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \Big/_{\!0}^{a} -2\sqrt{1-x} = -2(\sqrt{1-a} - \sqrt{1}) \to 2,$$

kun a $\to 1$. Siis tehtävän intergaali suppenee.

4. Onko olemassa sarjaa

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k,$$

jonka osasummien jono

$$x_1,\, x_1 + x_2,\, x_1 + x_2 + x_3,\, x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \ldots$$

on $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$?

Ratkaisu. Tarkastellaan osasummia. $S_1 = x_1 = 1, S_2 = x_1 + x_2 = \frac{1}{2}, S_3 = x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{3}, \ldots$ Siis $S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = \frac{1}{n}$. Lasketaan

$$\begin{aligned} S_n &= x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n \\ S_{n-1} &= x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} \end{aligned}$$

Tästä saadaan vähentämällä alempi yhtälö ylemmästä $S_n - S_{n-1} = x_n$ eli $x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n(n-1)}$. Huomataan, että saatu kaava ei päde, kun $n = 1$. Sarja voidaan nyt kirjoittaa muodossa

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k,$$

missä $x_1 = 1$ ja $x_k = \frac{1}{k(k-1)}$, kun $k \geq 2$. Siis vastaus: on olemassa.

Huom. Tehtävästä oli tippunut kaksi oleellista sanaa (osasummien jono) pois. Jos huomaatte tällaisia virheitä/omituisuuksia/tms laskareissa/kokeissa/tms, niin huomauttakaa mahdollisimman pian asiasta.