MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Ohjaus 4
9.2.2009 alkavalle viikolle
Ratkaisuehdotuksia (Santeri Miihkinen)

1. Määritä kaikki funktion $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ integraalifunktiot, kun $f(x) = 0$ kun $0 \leq x \leq 1$ ja $f(x) = x - 1$ kun $1 < x \leq 2$.

Ratkaisu. Koska funktio f on jatkuva, niin Lauseen 5.4. nojalla sillä on olemassa integraalifunktioita. Olkoon F jokin funktion f integraalifunktio. Koska jokaisella $x \in [0, 1[$ pätee $F'(x) = f(x) = 0$, niin $F(x) = C$ jollakin $C \in \mathbb{R}$. Toisaalta jokaisella $x \in]1, 2]$ on voimassa $F'(x) = f(x) = x-1$, joten saadaan

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + C'$$

jollakin $C' \in \mathbb{R}$. Tutkitaan kohta $x = 1$ erikseen, sillä funktion f määrittelylauseke muuttuu kyseisessä kohdassa. Koska integraalifunktio on aina derivoituva ja siten jatkuva (Huomautus 5.1.), niin erityisesti pisteessä $x = 1$ täytyy päteä

$$F(1) = \lim_{x \to 1-} F(x) = C = \lim_{x \to 1+} F(x) = \frac{1}{2} - 1 + C' = C' - \frac{1}{2}.$$

Näin ollen saadaan $C' = C + \frac{1}{2}$. Tarkistetaan vielä, että näin määriteltynä funktiolla F on derivaatta myös kohdassa $x = 1$ ja $F'(1) = f(1)$. Tehdään tämä tarkastelemalla erotusosamäärää. Olkoon ensin $h > 0$. Nyt Differentiaalilaskennan väliarvolauseen nojalla (Analyysi 1) on olemassa luku $\alpha \in (1, 1 + h)$, jolla

$$F(1 + h) - F(1) = F'(\alpha)(1 + h - 1) = f(\alpha)h.$$

Nyt saadaan

$$\frac{F(1 + h) - F(1)}{h} = \frac{F'(\alpha)h}{h} = f(\alpha) \to f(1),$$

kun $h \to 0+$, sillä tällöin $\alpha \to 1$ ja f on jatkuva erityisesti kohdassa $x = 1$. Siis pätee $F'_+(1) = f(1) = 0$. Jos $h < 0$, niin jälleen väliarvolauseen nojalla on olemassa luku $\beta \in (1+h, 1)$, jolla

$$F(1) - F(1+h) = F'(\beta)(1-(1+h)) = -f(\beta)h.$$

Siispä vastaavasti saadaan

$$\frac{F(1+h)-F(1)}{h} = \frac{F'(\beta)h}{h} = f(\beta) \to f(1),$$

kun $h \to 0-$, joten $F'_-(1) = f(1)$. Näin ollen on olemassa $F'(1)$ ja $F'(1) = f(1) = 0$. Nyt funktion F lauseke on

$$F(x) = \begin{cases} C, & \text{kun } x \in [0,1] \\ \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} + C, & \text{kun } x \in]1,2]. \end{cases}$$

Siispä jokainen funktion f integraalifunktio on edellistä muotoa jollakin vakiolla $C \in \mathbb{R}$. Toisaalta kaikki funktion f integraalifunktiot eroavat toisistaan vakiolla Lauseen 5.1. nojalla, joten muotoa $F(x)$ olevat funktiot ovat aina funktion f integraalifunktioita. Näin ollen on löydetty kaikki funktion f integraalifunktiot.

<u>Lisähuomautus:</u> Edellä suoritettu tarkastelu väliarvolauseen avulla osoittaa, että derivaatalla ei voi olla ”hyppäys” epäjatkuvuuskohtaa. Funktion g hyppäysepäjatkuvuuskohdassa x_0 siis toispuoleiset raja-arvot ovat olemassa ja erisuuret eli $\lim_{x\to x_0+} g(x) \neq \lim_{x\to x_0-} g(x)$. Jos siis funktio G on funktion g integraalifunktio jollakin välillä $[a,b]$ ja funktiolla g on toispuoleiset raja-arvot kohdassa $x_0 \in]a,b[$, niin pätee $G'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+} g(x) = \lim_{x\to x_0-} g(x) = G'_-(x_0)$ (muuten $\nexists G'(x_0)$).

2. Tarkastellaan funktiota $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, jolle $f(x) = 0$ kun $x \neq 1$ ja $f(1) = 3$.
(a) Onko f Riemann-integroituva?
(b) Onko funktiolla f integraalifunktioita?

Tarkastellaan funktiota $g : [0,2] \to \mathbb{R}$, jolle $g(x) = x^2 \sin\frac{1}{x^2}$ kun $x \neq 0$ ja $g(0) = 0$.
(c) Onko g derivoituva?
(d) Onko g' Riemann-integroituva?

Ratkaisu. (a) Osoitetaan funktion f integroituvuus Riemannin ehdon avulla (2.7. s. 3). Havaitaan aluksi tätä varten funktio f rajoitetuksi. Tarkastellaan jakoja

$$D_n = \{0, 1 - \frac{1}{2n}, 1 + \frac{1}{2n}, 2\},$$

missä $n = 1, 2, ...$ Nyt jakoon D_n liittyvät yläsumma S_{D_n} ja alasumma s_{D_n} eroavat toisistaan vain välin $\Delta_2 = [1 - \frac{1}{2n}, 1 + \frac{1}{2n}]$ osalta. Siis saadaan

$$S_{D_n} - s_{D_n} = (G_2 - g_2)\ell(\Delta_2) = (3 - 0)\frac{1}{n} = \frac{3}{n} \to 0,$$

kun $n \to \infty$. Näin ollen Riemannin ehdon nojalla funktio f on integroituva.

(b) Jos funktiolla f olisi integraalifunktio $F : [0, 2] \to \mathbb{R}$, niin tällöin ehdosta $F'(x) = f(x)$ seuraa, että $F(x) = C$ jokaisella $x \in [0, 1[$ ja $F(x) = C'$ jokaisella $x \in]1, 2]$. Koska F on jatkuva, niin täytyy päteä

$$\lim_{x \to 1-} F(x) = C = C' = \lim_{x \to 1+} F(x) = F(1).$$

Näin ollen $F(x) = C$ jokaisella $x \in [0, 2]$ ja siten $F'(x) = 0$ kaikilla $x \in [0, 2]$. Erityisesti pätee $F'(1) = 0 \neq f(1) = 3$, mikä on ristiriita. Siispä funktiolla f ei ole integraalifunktiota välillä $[0, 2]$.

(c) Oletetaan aluksi, että $x \neq 0$. Tällöin käyttämällä tulon derivoimissääntöä ja ketjusääntöä saadaan

$$g'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x^2}) + x^2 \cos(\frac{1}{x^2})(-2)\frac{1}{x^3} = 2x \sin(\frac{1}{x^2}) - \frac{2}{x} \cos(\frac{1}{x^2}).$$

Tutkitaan funktion derivoituvuus vielä kohdassa $x = 0$ erotusosamäärän avulla: Koska

$$|\frac{g(h) - g(0)}{h}| = |\frac{h^2 \sin(\frac{1}{h^2})}{h}| = |h \sin(\frac{1}{h^2})| \leq |h| \cdot 1 = |h| \to 0,$$

kun $h \to 0$, niin on olemassa $g'(0) = 0$. Funktio g on siis derivoituva ja

$$g'(x) = \begin{cases} 2x \sin(\frac{1}{x^2}) - \frac{2}{x} \cos(\frac{1}{x^2}), & \text{kun } x \neq 0 \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

(d) Koska pisteissä $x_n = \frac{1}{\sqrt{n2\pi}}$, missä $n \in \mathbb{N}$, pätee $\sin(\frac{1}{x_n^2}) = \sin(n2\pi) = 0$ ja $\cos(\frac{1}{x_n^2}) = \cos(n2\pi) = 1$, niin saadaan $g'(x_n) = -2\sqrt{n2\pi}$. Näin ollen

$|g'(x_n)| \to \infty$, kun $n \to \infty$. Siispä funktio g' ei ole rajoitettu välillä $[0, 2]$, joten se ei myöskään ole kyseisellä välillä Riemann-integroituva. Itseasiassa funktio g' ei ole Riemann-integroituva millään välillä $[a, b]$, joka sisältää pisteen $x = 0$. Toisaalta funktio g' on jatkuvana funktiona Riemann-integroituva jokaisella välillä $[a, b]$, joka ei sisällä pistettä $x = 0$.

Huomautus: Tässä tehtävässä tuli esimerkki funktiosta f, joka on Riemann-integroituva ja jolla ei kuitenkaan ole integraalifunktioita. Toisaalta annettiin esimerkki funktiosta g', jolla on integraalifunktio ja joka ei kuitenkaan ole Riemann-integroituva.

3. Miksi

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx$$

täytyy tulkita epäoleelliseksi integraaliksi? Suppeneeko vai hajaantuuko se?

Ratkaisu. Merkitään $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx$. Integroitavaa funktiota $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ ei ole määritelty kohdassa $x = 1$, minkä vuoksi integraali on epäoleellinen. Toisaalta funktio f ei ole rajoitettu missään pisteen 1 ympäristössä, mikä tekee integraalista myös epäoleellisen. Havaitaan, että funktio f on jatkuvana funktiona Riemann-integroituva jokaisella suljetulla välillä $[0, c]$, missä $0 < c < 1$. Nyt epäoleellinen integraali suppenee, jos on olemassa raja-arvo

$$\lim_{c \to 1-} \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$$

Muussa tapauksessa se hajaantuu. Lähdetään laskemaan määrättyä integraalia:

$$\int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2 \Big/_{0}^{c} \sqrt{1-x} = -2(\sqrt{1-c} - 1) = 2 - 2\sqrt{1-c} \to 2,$$

kun $c \to 1-$. Näin ollen epäoleellinen integraali I suppenee ja sen arvo on

$$I = \lim_{c \to 1-} \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2.$$

4. Määritä sen alueen pinta-ala, jota rajoittavat x-akseli, origoa ja hyperbelin $x^2 - y^2 = 1$ pistettä $(\cosh t, \sinh t)$ yhdistävä jana sekä pisteitä $(\cosh t, \sinh t)$ ja $(1, 0)$ yhdistävä hyperbelin kaari. (Tähän palataan tarvittaessa luennolla.)

Ratkaisu. Ennen tehtävän varsinaista ratkaisua kiinnitetään aluksi huomiota siihen, miksi hyperbeli voidaan parametrisoida funktioiden $\cosh t$ ja $\sinh t$ avulla (Vertaa yksikköympyrän parametrisointi $(\cos t, \sin t)$). Hyperbelin yhtälöstä

$$x^2 - y^2 = 1$$

saadaan $x^2 = 1 + y^2$, joten pätee $x = \sqrt{1+y^2} \geq 1$ tai $x = -\sqrt{1+y^2} \leq -1$. Tehtävässä voidaan rajoittua positiivisiin arvoihin x ja y. Tällöin saadaan siis

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ y = \sqrt{x^2-1}. \end{cases}$$

Näin ollen koordinaattien x ja y parametrisoinnissa täytyy huomioida edelliset rajoitteet. Nyt kurssin Analyysi 1 perusteella tiedetään, että

$$\cosh : [0, \infty) \to [1, \infty)$$

on jatkuva bijektio. Siispä x voidaan parametrisoida funktion $\cosh t$ avulla. Koska lisäksi pätee $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ ja funktio $\sinh t$ on välillä $[0, \infty)$ ei-negatiivinen, niin y saa tässä parametrisoinnissa arvon $y = \sinh t$.

Siirrytään nyt tehtävän varsinaiseen ratkaisuun. Olkoon A_1 $x-$akselin, suoran $x = \cosh t$ sekä origon ja pisteen $(\cosh t, \sinh t)$ yhdysjanan muodostaman kolmion pinta-ala. Tällöin

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2}\cosh t \sinh t = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}(e^t + e^{-t})][\frac{1}{2}(e^t - e^{-t})] = \frac{1}{8}(e^{2t} - 1 + 1 - e^{-2t}) \\ &= \frac{1}{8}(e^{2t} - e^{-2t}). \end{aligned}$$

Olkoon A_2 $x-$akselin, suoran $x = \cosh t$ sekä pisteitä $(\cosh t, \sinh t)$ ja $(1, 0)$ yhdistävän hyperbelin kaaren rajoittaman "segmentin" pinta-ala. Tällöin saadaan $A_2 = \int_1^{\cosh t} \sqrt{x^2-1}dx$. Tehdään sijoitus $x = \cosh t'$, jolloin

$$\begin{aligned} &dx = D(\cosh t')dt' = \sinh t' dt'; \\ &\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\cosh^2 t' - 1} = \sinh t'. \end{aligned}$$

Lisäksi integrointirajoiksi saadaan

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = \cosh t \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} t'_1 = 0 \\ t'_2 = t. \end{array}\right.$$

Sijoittamalla nämä pinta-alan A_2 integraalilausekkeeseen saadaan

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_0^t \sinh t' \ \sinh t' dt' = \int_0^t \sinh^2 t' dt' = \int_0^t \frac{1}{4}(e^{t'} - e^{-t'})^2 dt' \\ &= \int_0^t \frac{1}{4}(e^{2t'} - 2 + e^{-2t'}) dt' = \frac{1}{4} \Big/_{0}^{t} (\frac{1}{2}e^{2t'} - 2t' - \frac{1}{2}e^{-2t'}) \\ &= \frac{1}{4}[(\frac{1}{2}e^{2t} - 2t - \frac{1}{2}e^{-2t}) - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2})] = \frac{1}{8}e^{2t} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}e^{-2t}. \end{aligned}$$

Kysytty pinta-ala A on edellisten alojen erotus eli

$$A = A_1 - A_2 = (\frac{1}{8}(e^{2t} - e^{-2t})) - (\frac{1}{8}e^{2t} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}e^{-2t}) = \frac{1}{2}t.$$

<u>Huomautus:</u> Jos lasketaan kulmaa t (radiaaneissa) vastaavan yksikköympyrän sektorin ala A' havaitaan, että

$$A' = \frac{t}{2\pi}\pi 1^2 = \frac{t}{2}.$$

Näin ollen tehtävän "yksikköhyperbelin" parametrisointi $(\cosh t, \sinh t)$ on tässä mielessä vastaava yksikköympyrän parametrisoinnin $(\cos t, \sin t)$ kanssa.