MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Ohjaus 1
19.1.2009 alkavalle viikolle
Ratkaisuehdotuksia (Sauli Lindberg)

Näissä mallivastauksissa *Pohdintaa*-osuuksien on tarkoitus selittää, mitä varsinaisissa ratkaisuissa tehdään ja miten ratkaisut on keksitty. *Ratkaisu*-kohdissa esitetään tehtävien varsinaiset ratkaisut, ja niiden läpikäymiseksi ei ole välttämätöntä lukea ratkaisua edeltäviä pohdintoja.

1. Laske

$$\int_{\sqrt{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} x \sin(x^2)\, dx.$$

Tunnista yhdistetyn funktion derivaatta.

Pohdintaa. Pyritään ilmaisemaan integroitava $x\sin(x^2)$ yhdistetyn funktion derivaattana eli muodossa

$$x\sin(x^2) = (g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x)),$$

missä $g, f : [\sqrt{\pi/4}, \sqrt{\pi/3}] \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvasti derivoituvia. Sisäfunktion on oltava muotoa

$$f(x) = x^2 \text{ kaikilla } x \in \left[\sqrt{\frac{\pi}{4}}, \sqrt{\frac{\pi}{3}}\right],$$

joten $f'(x) = 2x$ kaikilla $x \in [\pi/4, \pi/3]$. Nyt g' saadaan kaavalla $g'(x) = (1/2)\sin x$, joten voidaan valita g olemaan muotoa $g(x) = -(1/2)\cos x$. Siis

$$D\left(-\frac{1}{2}\cos(x^2)\right) = (g \circ f)'(x) = x\sin(x^2)$$

kaikilla $x \in [\sqrt{\pi/4}, \sqrt{\pi/3}]$.

Ratkaisu. Analyysin peruslauseen eli Lauseen 5.6 (s. 18) nojalla

$$\begin{aligned}
\int_{\sqrt{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} x\sin(x^2)\, dx &= \int_{\sqrt{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} D\left(-\frac{1}{2}\cos(x^2)\right) dx = \Big/_{\sqrt{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} -\frac{1}{2}\cos(x^2) \\
&= -\frac{1}{2}(\cos(\pi/3) - \cos(\pi/4)) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}-1}{4}.
\end{aligned}$$

□

2. Laske

$$\int_0^1 e^x e^{e^x}\, dx.$$

Tunnista yhdistetyn funktion derivaatta. Tässä $e^{e^x} = e^{(e^x)}$.

Pohdintaa. Yritetään ilmaista integroitava funktio muodossa

$$e^x e^{e^x} = (g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x)),$$

missä $g, f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvasti derivoituvia. Valitaan $g(x) = f(x) = e^x$ kaikilla $x \in [0,1]$, jolloin

$$D\left(e^{e^x}\right) = (g \circ f)'(x) = e^x e^{e^x}$$

kaikilla $x \in [0,1]$.

Ratkaisu. Analyysin peruslausetta soveltamalla saadaan

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^x e^{e^x} dx &= \int_0^1 D\left(e^{e^x}\right) dx = \Big/_{\!0}^{1} e^{e^x} = e^{e^1} - e^{e^0} \\ &= e^e - e.\end{aligned}$$

$\square$

3. Laske

$$(1) \int_1^2 x^2 e^x dx;$$

$$(2) \int_1^2 x^3 e^{x^2} dx;$$

Osittaisintegrointi auttaa.

Pohdintaa. Kohdassa (1) ei enää voida ilmaista integroitavaa funktiota yhdistetyn funktion derivaattana. Vaikka kahden derivoituvan funktion tulolle onkin olemassa kätevä derivoimiskaava $(fg)' = f'g + fg'$, kahden integroituvan funktion tulolle ei ole olemassa vastaavaa kaavaa. Tällä kertaa tulon x^2e^x tekijästä x^2 voidaan kuitenkin hankkiutua eroon hyödyntämällä seuraavaa osittaisintegrointilausetta (s. 23):

Lause. *Olkoot $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivoituvia ja u', v' integroituvia (esim. jatkuvia) välillä $[a, b]$. Tällöin*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \Big/_a^b u(x)v(x) - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Kun osittaisintegroidaan kahdesti, integroitavaksi jää lopulta vain $2e^x$.

Kohdan (2) integraali saadaan yhdellä osittaisintegroinnilla muotoon, jossa integroitava funktio on yhdistetyn funktion derivaatta. Sopiva yhdistetty funktio löydetään kuten tehtäviä 1 ja 2 edeltävissä pohdinnoissa.

(1):n ratkaisu. Merkitään

$$\begin{aligned} u(x) &= x^2, \qquad & u'(x) &= 2x, \\ v'(x) &= e^x, \qquad & v(x) &= e^x \end{aligned}$$

kaikilla $x \in [1, 2]$, jolloin osittaisintegrointilauseen nojalla

$$\int_1^2 x^2 e^x dx = \Big/_1^2 x^2 e^x - \int_1^2 2xe^x dx = 4e^2 - e - \int_1^2 2xe^x\,dx.$$

Osittaisintegroidaan uudelleen:

$$\begin{aligned} \int_1^2 2xe^x dx &= \Big/_1^2 2xe^x - \int_1^2 2e^x dx = 4e^2 - 2e - \Big/_1^2 2e^x \\ &= 4e^2 - 2e - (2e^2 - 2e) = 2e^2. \end{aligned}$$

Näin saadaan vastaukseksi

$$\int_1^2 x^2 e^x dx = 2e^2 - e.$$

$\square$

(2):n ratkaisu. Merkitään

$$u(x) = \frac{1}{2}x^2, \qquad u'(x) = x,$$

$$v'(x) = 2xe^{x^2}, \qquad v(x) = e^{x^2}$$

kaikilla $x \in [1, 2]$, jolloin osittaisintegroimalla saadaan

$$\int_1^2 x^3 e^{x^2} dx = \Big/_{1}^{2} \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \int_1^2 xe^{x^2} dx = 2e^4 - \frac{1}{2}e - \int_1^2 xe^{x^2} dx.$$

Koska

$$D\left(\frac{1}{2}e^{x^2}\right) = xe^{x^2}$$

kaikilla $x \in [1, 2]$, niin Analyysin peruslauseen nojalla

$$\int_1^2 xe^{x^2} dx = \Big/_{1}^{2} \frac{1}{2}e^{x^2} = \frac{1}{2}(e^4 - e).$$

Vastaus on siis

$$\int_1^2 x^3 e^{x^2} dx = \frac{3}{2}e^4.$$

$\square$

4. Laske sijoituksella $e^x = u$

$$\int_0^1 e^x e^{e^x} dx.$$

Pohdintaa. Sijoituksessa $e^x = u$ sovelletaan luentomonisteen Huomautuksen 6.4 (s. 22) kohtaa 2). Määritellään $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\psi(x) = e^x$, jolloin $\psi([0,1]) \subset [1,e]$ ja $\psi(0) = 1$, $\psi(1) = e$. Määritellään lisäksi $g : [1,e] \to \mathbb{R}$ kaavalla $g(x) = e^x$, jolloin Huomautuksen 6.4 mukaan

$$\int_0^1 e^x e^{e^x} dx = \int_0^1 \psi'(x) g(\psi(x))\, dx = \int_1^e g(u)\, du = \int_1^e e^u du.$$

Kirjoitamme kuitenkin ratkaisun samalla tavalla kuin luentomonisteen Esimerkissä 6.5 (s. 22). Kuten luennoillakin on korostettu, ratkaisussa esiintyvä "yhtälö"$du = e^x dx$ on lähinnä kätevä muistisääntö, joka helpottaa sijoituksen tekemistä. Muuttujanvaihdon täsmällinen matemaattinen perustelu tapahtuu Lauseen 6.3 (s. 21) tai Huomautuksen 6.4 (s. 22) avulla.

Ratkaisu. Merkitään $u = e^x$, jolloin $du = e^x dx$. Lasketaan uudet integroimisrajat:

$$x = 0 \Longrightarrow u = e^0 = 1,$$
$$x = 1 \Longrightarrow u = e^1 = e.$$

Analyysin peruslauseella saadaan

$$\int_0^1 e^x e^{e^x} dx = \int_1^e e^u du = \Big/_{1}^{e} e^u = e^e - e.$$

$\square$