MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Ohjaus 11
20.4.2009 alkavalle viikolle
Ratkaisuehdotuksia
Sauli Lindberg

1. Muodosta funktiolle $f(x) = \sqrt{x}$ Taylorin polynomi $T_4(x; 1)$.

Ratkaisu. Funktio f on mielivaltaisen monesti derivoituva, kun $x > 0$. Siis $f \in C^4(B(1,1))$, missä $B(1,1) =]1-1, 1+1[=]0,2[$. Kun $x \in B(1,1)$, funktion f Taylorin polynomi $T_4(x; 1)$ on määritelty (s. 101) kaavalla

$$T_4(x;1) = f(1) + \sum_{k=1}^{4} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k.$$

Lasketaan f:n ensimmäisten neljän derivaatan lausekkeet, kun $x \in B(0,1)$:

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= f'(x) = Dx^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \\
f(2)(x) &= D\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}, \\
f^{(3)}(x) &= D\left(-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}, \\
f^{(4)}(x) &= D\left(\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}\right) = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}.
\end{aligned}$$

Siis

$$f^{(1)}(1) = \frac{1}{2}, \quad f^{(2)}(1) = -\frac{1}{4}, \quad f^{(3)}(1) = \frac{3}{8}, \quad f^{(4)}(1) = -\frac{15}{16}.$$

Sijoitetaan Taylorin polynomin lausekkeeseen:

$$\begin{aligned}
T_4(x;1) &= 1 + \frac{1}{2\cdot 1!}(x-1) - \frac{1}{4\cdot 2!}(x-1)^2 + \frac{3}{8\cdot 3!}(x-1)^3 - \frac{15}{16\cdot 4!}(x-1)^4 \\
&= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 - \frac{5}{128}(x-1)^4.
\end{aligned}$$

□

Huomautus. Katsomalla Taylorin kaavan todistusta luentomonisteen sivulla 102 huomataan, että Taylorin polynomi $T_4(x; 1)$ voidaan itse asiassa määritellä kaikilla $x \in]0, \infty[$, ei vain välillä $]0, 2[$. Lisäksi virhetermi $R_5(x; 1)$ saadaan laskettua kaavalla

$$R_5(x;1) = \frac{1}{(n-1)!}\int_1^x f^{(4)}(t)(x-t)^3 dt$$

kaikilla $x \in]0, \infty[$.

2. Määritä jokin n, jolle funktion $f(x) = e^x$ Taylorin polynomin $T_{n-1}(x; 0)$ arvot poikkeavat alle 10^{-3} arvoista e^x kaikilla $x \in [-2, 2]$.

Ratkaisu. Kun $x \in [-2, 2]$ ja $n \in \mathbb{N}$, Taylorin kaavan (s. 102) mukaan

$$f(x) = T_{n-1}(x; 0) + R_n(x; 0).$$

Lagrangen jäännöstermimuodon (s. 102) mukaan jäännöstermi $R_n(x; 0)$ on muotoa

$$R_n(x; 0) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} x^n = \frac{e^\xi}{n!} x^n,$$

missä ξ on 0:n ja x:n välissä. Siis $f(x)$:n ja $T_{n-1}(x; 0)$:n erotus on

$$f(x) - T_{n-1}(x; 0) = R_n(x; 0) = \frac{e^\xi}{n!} x^n.$$

On siis löydettävä sellainen $n \in \mathbb{N}$, että

$$|f(x) - T_{n-1}(x; 0)| = \left| \frac{e^\xi}{n!} x^n \right| = \frac{e^\xi |x|^n}{n!} < 10^{-3}$$

kaikilla $x \in [-2, 2]$. Jos $x \geq 0$, niin $0 \leq \xi \leq x \leq 2$. Jos taas $x < 0$, niin $x < \xi \leq 0$. Siis joka tapauksessa $\xi \leq 2$. Lisäksi $|x| \leq 2$, joten

$$\frac{e^\xi |x|^n}{n!} \leq \frac{e^2 \cdot 2^n}{n!} \leq \frac{3^2 \cdot 2^n}{n!} = \frac{9 \cdot 2^n}{n!}.$$

Kokeilemalla huomataan, että kun $n = 11$, saadaan

$$\frac{9 \cdot 2^{11}}{11!} = \frac{9 \cdot 2048}{39916800} < 10^{-3}.$$

Voidaan siis valita $n = 11$.

□

3. Muodosta funktiolle $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ Taylorin kehitelmät $f(x) = T_n(x; 0) + x^3 \epsilon(x)$ tapauksissa $n = 2, 3$ ja 4.

Ratkaisu. Muodostetaan ensin f:n Taylorin polynomit $T_n(x; 0)$. Funktion f ensimmäisille neljälle derivaatalle pätee

$$\begin{array}{lll}
f^{(1)}(x) = b + 2cx + 3dx^2 \, \forall x \in \mathbb{R} & \Longrightarrow & f'(0) = b, \\
f^{(2)}(x) = 2c + 6dx \, \forall x \in \mathbb{R} & \Longrightarrow & f^{(2)}(0) = 2c, \\
f^{(3)}(x) = 6d \, \forall x \in \mathbb{R} & \Longrightarrow & f^{(3)}(0) = 6d, \\
f^{(4)}(x) = 0 \, \forall x \in \mathbb{R} & \Longrightarrow & f^{(4)}(0) = 0.
\end{array}$$

Siis kaikilla $x \in \mathbb{R}$ saadaan

$$\begin{aligned} T_2(x;0) = & \quad f(0) \quad + \frac{f^{(1)}(0)}{1!} \quad + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 \\ = & \quad a \quad + bx \quad + cx^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_3(x;0) = & \quad f(0) \quad + \frac{f^{(1)}(0)}{1!} \quad + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 \quad + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 \\ = & \quad a \quad + bx \quad + cx^2 \quad + dx^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_4(x;0) = & \quad f(0) \quad + \frac{f^{(1)}(0)}{1!} \quad + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 \quad + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 \quad + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 \\ = & \quad a \quad + bx \quad + cx^2 \quad + dx^3. \end{aligned}$$

Nyt saadaan f:lle halutut Taylorin kehitelmät. Tapauksessa $n = 2$ on

$$\begin{aligned} f(x) = & \quad a + bx + cx^2 \quad + dx^3 \\ = & \quad \underbrace{a + bx + cx^2}_{T_2(x;0)} \quad + x^2 \cdot \underbrace{dx}_{\epsilon(x)}, \end{aligned}$$

tapauksissa $n = 3$ ja $n = 4$ taas

$$\begin{aligned} f(x) = & \quad a + bx + cx^2 + dx^3 \\ = & \quad \underbrace{a + bx + cx^2 + dx^3}_{T_3(x;0)} \quad + x^3 \cdot \underbrace{0}_{\epsilon(x)} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} f(x) = & \quad a + bx + cx^2 + dx^3 \\ = & \quad \underbrace{a + bx + cx^2 + dx^3}_{T_4(x;0)} \quad + x^3 \cdot \underbrace{0}_{\epsilon(x)}. \end{aligned}$$

$\square$

4. Muodostetaan funktiolle $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ Taylorin kehitelmä $f(x) = T_3(x;0) + x^3 \epsilon(x)$. Miltä "epsilon-lauseke"näyttää? Tehtävässä oletetaan, että ko. potenssisarjan suppenemissäde > 0.

Ratkaisu. Oletuksen mukaan suppenemissäde $R > 0$. Lauseen V.2.5 (s. 97) nojalla potenssisarjalla $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ on välillä $]-R, R[$ kaikkien kertalukujen derivaatat ja se voidaan derivoida termeittäin. Merkitään $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ kaikilla $x \in]-R, R[$. Tällöin, kun $x \in]-R, R[$, on

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} D(a_k x^k) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}.$$

Huomataan, että saadussa f':n esityksessä summaus alkaa indeksistä 1. Tämä johtuu siitä, että potenssisarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ensimmäinen termi $a_0 x^0 = a_0$ on vakio, joten sen derivaatta $D(a_0 x^0) = 0$. Vastaavasti

$$f''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} D(k a_k x^{k-1}) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}$$

ja

$$f'''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} D(k(k-1) a_k x^{k-2}) = \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2) a_k x^{k-3}.$$

Siis

$$f'(0) = 1 \cdot a_1 = a_1, \quad f''(0) = 2 \cdot 1 \cdot a_2 = 2a_2, \quad f'''(0) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_3 = 6a_3.$$

Taylorin polynomin $T_3(x;0)$ lausekkeeksi saadaan

$$\begin{aligned} T_3(x;0) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 \\ &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3. \end{aligned}$$

Nyt voidaan selvittää, miltä "epsilon-lauseke" näyttää: kun $x \neq 0$, on

$$\begin{aligned} & f(x) = T_3(x;0) + x^3 \epsilon(x) \\ \Longrightarrow\ & x^3 \epsilon(x) = f(x) - T_3(x;0) \\ \Longrightarrow\ & \epsilon(x) = \frac{f(x) - T_3(x;0)}{x^3} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - \sum_{k=0}^{3} a_k x^k}{x^3} = \sum_{k=4}^{\infty} a_k x^{k-3}. \end{aligned}$$

Siis f:n Taylorin kehitelmä on muotoa

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{3} a_k x^k}_{T_3(x;0)} + x^3 \cdot \underbrace{\sum_{k=3}^{\infty} a_k x^{k-3}}_{\epsilon(x)}.$$

$\square$