MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Ohjaus 10
Mallit (Ansku)

1. Suppeneeko geometrinen sarja $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ tasaisesti välillä $]-1,0[$?
Vihje: huomaa, että osasumman ja koko sarjan summan erotusta voi käsitellä geometrisen sarjan summakaavan avulla.

Ratkaisu. Käytetään vihjettä:

$$|S_n(x) - S(x)| = |\frac{1-x^n}{1-x} - \frac{1}{1-x}| = |\frac{x^n}{1-x}|.$$

Tästä saadaan

$$\sup_{x\in]-1,0[} \{|R_n(x)|\} = \sup_{x\in]-1,0[} |\frac{x^n}{1-x}| = \sup_{x\in]-1,0[} \frac{|x|^n}{1-x} = \frac{1}{2},$$

joten suppeneminen ei ole tasaista (sup, kun $x \to -1$).

2. Suppeneeko geometrinen sarja $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ tasaisesti välillä $]0,1[$?
Vihje: huomaa, että osasumman ja koko sarjan summan erotusta voi käsitellä geometrisen sarjan summakaavan avulla.

Ratkaisu. Jäännöstermi lasketaan kuten tehtävässä 1. Tarkastellaan sen supremumia nyt välillä $]0,1[$.

$$\sup_{x\in]0,1[} \{|R_n(x)|\} = \sup_{x\in]0,1[} |\frac{x^n}{1-x}| = \sup_{x\in]0,1[} \frac{x^n}{1-x} = \infty,$$

joten suppeneminen ei ole tasaista (sup, kun $x \to 1$).

3. Tässä ja seuraavassa tehtävässä jatketaan monisteen esimerkkiä, jossa tutkittiin geometrisen sarjan derivaattaa. (Esimerkki 3.9 (1) funktiotermisten sarjojen tasaista suppenemista käsittelevässä luvussa.) Osoita, että sarja

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2}$$

suppenee tasaisesti jokaisella välillä $[-a,a]$, missä $0 < a < 1$.

Ratkaisu. Käytetään Weierstrassin testiä.

$$|f_k(x)| = |k(k-1)x^{k-2}| = k(k-1)\,|x|^{k-2} \leq k^2|x|^{k-2} \leq k^2 a^{k-2}.$$

Monisteen sivun 85 mukaan sarja $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 a^k$ suppenee. Weierstrassin lauseen oletukset siis pätevät, joten sarja $\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2}$ suppenee tasaisesti jokaisella välillä $[-a, a]$, missä $0 < a < 1$.

4. Millaisen summakaavan saat tutkimalla geometrisen sarjan $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ toista derivaattaa?

Ratkaisu. Geometrisen sarjan toinen derivaatta on sopivasti edellisen tehtävän sarja, joka on saatu näin:

$$D(D\sum_{k=0}^{\infty} x^k) = D\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2}.$$

Se suppenee tasaisesti välillä $[-a, a]$, missä $0 < a < 1$, funktiot x^k ovat jatkuvasti derivoituvia, ja geometrinen sarja suppenee ainakin yhdessä pisteessä (ja itse asiassa koko välillä). Siksi voidaan derivoida geometrisen sarjan summakaavaa kahdesti ja saadaan kysytty summakaava:

$$D(D\frac{1}{1-x}) = \frac{2}{(1-x)^3}.$$