

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi II

Ohjaus 8

23. 3. 2009 alkavalle viikolle

Ohjauksiin osallistumisesta saa syksyn tapaan lisäpisteitä 23.3. alkaen:

Osallistumalla 4 - 5 ohjaukseen saa 2 lisäpistettä ja osallistumalla 3 ohjaukseen saa 1 lisäpistettä.

1. Tarkastellaan funktioita  $f_n(x) = x^n$  välillä  $]0, 1[$ .

(a) Miten voidaan perustella, että kaikilla  $x \in ]0, 1[$  pätee  $f_n(x) \rightarrow 0$  kun  $n \rightarrow \infty$ ? (Vihje: Bernoullin epäyhtälö.)

(b) Edellisen kohdan nojalla tiedetään, että kaikilla  $x \in ]0, 1[$  on olemassa sellainen  $K_x$ , että kaikilla  $n > K_x$  on pätee  $f_n(x) < 10^{-100}$ . Miten  $K_x$  riippuu kohdasta  $x$ ? (Voit tutkia esimerkiksi lausekkeen

$$-100 \frac{\ln 10}{\ln x}$$

käyttäytymistä kun  $x \in ]0, 1[$ .)

2. Määritellään  $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$  kun  $n = 1, 2, \dots$ . Hahmottele kuva. Suppeneeko jono  $f_1, f_2, \dots$  tasaisesti?

3. Laske

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2 + n^2}} dx.$$

Käytä tasaista suppenemista (tarkista se!)

4. Oletetaan, että  $f_n : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  ja  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  ja että  $f_n \rightarrow f$  tasaisesti, kun  $n \rightarrow \infty$ . Osoita, että  $f_n \rightarrow f$  pisteittäin, kun  $n \rightarrow \infty$ .