MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Harjoitus 5
16 . 2. 2009 alkavalle viikolle
Ratkaisuehdotuksia (6 sivua) (Santeri Miihkinen)

1. Suppeneeko vai hajaantuuko epäoleellinen integraali

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2(\cos^3(x^4))}{x^2}\,dx?$$

Ratkaisu. Sovelletaan tehtävän ratkaisuun majoranttiperiaatetta (Lause 2.2.). Koska pätee $\sin^2(\cos^3(x^4)) \le 1$ jokaisella $x \in \mathbb{R}$, niin funktiolle

$$f(x) = \frac{\sin^2(\cos^3(x^4))}{x^2}$$

saadaan $0 \le f(x) \le \frac{1}{x^2}$ kaikilla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Näin ollen majoranttiperiaatteen mukaan tehtävän epäoleellinen integraali suppenee, mikäli epäoleellinen integraali

$$I = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$$

suppenee. Olkoon $1 < b < \infty$. Koska

$$\int_1^b \frac{1}{x^2}dx = \Big/_{1}^{b} -\frac{1}{x} = -\frac{1}{b} - (-1) = 1 - \frac{1}{b} \to 1,$$

kun $b \to \infty$, niin integraali I suppenee. Siispä myös integraali

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2(\cos^3(x^4))}{x^2}dx$$

suppenee.

2. Suppeneeko vai hajaantuuko epäoleellinen integraali

$$\int_0^1 \frac{\sin(e^{x-1})}{x^2}\,dx?$$

Ratkaisu. Käytetään ratkaisussa jälleen Lausetta 2.2. Osoitetaan, että tehtävän integraalilla on hajaantuva minorantti, jolloin integraali hajaantuu. Kun $x \in [0,1]$, niin aidosti kasvavan ja jatkuvan eksponenttifunktion $x \mapsto e^{x-1}$ arvojoukko on suljettu väli $[e^{0-1}, e^{1-1}] = [e^{-1}, 1]$. Koska tämä väli sisältyy väliin $[0, \frac{\pi}{2}]$, jolla sinifunktio on aidosti kasvava ja ei-negatiivinen, niin voidaan arvioida

$$\frac{\sin(e^{x-1})}{x^2} \geq \frac{\sin(e^{-1})}{x^2} \geq 0$$

kaikilla $x \in]0,1]$. Olkoon $0 < a < 1$. Nyt pätee

$$\int_a^1 \frac{\sin(e^{-1})}{x^2} dx = \sin(e^{-1}) \Big/_{a}^{1} -\frac{1}{x} = \sin(e^{-1})(\frac{1}{a} - 1) \to \infty,$$

kun $a \to 0$. Näin ollen integraali $\int_0^1 \frac{\sin(e^{-1})}{x^2} dx$ hajaantuu ja edelleen tehtävän integraali hajaantuu minoranttiperiaatteen nojalla.

3. Suppeneeko vai hajaantuuko epäoleellinen integraali

$$\int_0^1 \frac{\sin(e^{x-1})}{\sqrt{x}}\, dx?$$

Ratkaisu. Osoitetaan tehtävän integraalin suppeneminen majoranttiperiaatteen avulla. Tehtävässä 2 saatiin arvio

$$\sin(e^{x-1}) \geq 0$$

jokaisella $x \in]0,1]$. Koska lisäksi kaikilla $x \in \mathbb{R}$ on voimassa $|\sin(x)| \leq 1$, niin saadaan

$$0 \leq \frac{\sin(e^{x-1})}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

jokaisella $x \in]0,1]$. Olkoon $0 < a < 1$. Nyt pätee

$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \Big/_{a}^{1} \sqrt{x} = 2(1 - \sqrt{a}) \to 2,$$

kun $a \to 0$, joten epäoleellinen integraali $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ suppenee. Näin ollen tehtävän integraali suppenee.

4. Suppeneeko vai hajaantuuko

$$\int_0^2 (\frac{1}{\sqrt{2-x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}})\,dx?$$

Ratkaisu. Merkitään

$$I = \int_0^2 (\frac{1}{\sqrt{2-x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}})dx.$$

Nyt integraali I on epäoleellinen sekä ala- että ylärajan suhteen. Määritelmän 1.9 (s. 49) ja sitä seuraavan lemman perusteella integraali I voidaan jakaa kahteen osaan mielivaltaisella apupisteellä $d \in]0,2[$ ja tutkia saatujen integraalien suppeneminen. Valitaan $d = 1$, jolloin saadaan

$$I = \underbrace{\int_0^1 (\frac{1}{\sqrt{2-x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}})dx}_{=I_1} + \underbrace{\int_1^2 (\frac{1}{\sqrt{2-x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}})dx}_{=I_2}.$$

Tarkastellaan ensin integraalia I_1, joka on epäoleellinen alarajan suhteen, sillä jälkimmäisen summattavan nimittäjä on nolla alarajalla *. Olkoon $0 < a < 1$. Nyt saadaan

$$\int_a^1 (\frac{1}{\sqrt{2-x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}})dx = \Big/_{\!a}^{1} (-2\sqrt{2-x} + 3\sqrt[3]{x})$$
$$= (-2\sqrt{2-1} + 3\sqrt[3]{1}) - (-2\sqrt{2-a} + 3\sqrt[3]{a}) = 1 + 2\sqrt{2-a} - 3\sqrt[3]{a} \to 1 + 2\sqrt{2},$$

kun $a \to 0$. Siis integraali I_1 suppenee ja sen arvo on $I_1 = 1 + 2\sqrt{2}$. Tarkastellaan sitten integraalia I_2, joka on epäoleellinen ylärajan suhteen (ensimmäisen summattavan nimittäjä on ylärajalla nolla). Olkoon $1 < b < 2$. Tällöin pätee

$$\int_1^b (\frac{1}{\sqrt{2-x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}})dx = \Big/_{\!1}^{b} (-2\sqrt{2-x} + 3\sqrt[3]{x})$$
$$= (-2\sqrt{2-b} + 3\sqrt[3]{b}) - (-2\sqrt{2-1} + 3\sqrt[3]{1}) = -2\sqrt{2-b} + 3\sqrt[3]{b} - 1 \to 3\sqrt[3]{2} - 1,$$

kun $b \to 2$. Siis integraali I_2 suppenee ja sen arvo on $I_2 = 3\sqrt[3]{2} - 1$. Koska integraalit I_1 ja I_2 suppenevat, niin integraali I suppenee ja sen arvo on

$$I = I_1 + I_2 = 1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{2} - 1 = 2\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{2}.$$

* Huomaa, että ensimmäinen summattava on Riemann-integroituva välillä $[0,1]$ ja sen Riemann-integraali on sama kuin epäoleellinen integraali (katso Lause 1.3 s.48). Tämä seuraa integraalin jatkuvuudesta ylärajan (alarajan) muuttujan suhteen.

5. Suppeneeko vai hajaantuuko

$$\int_1^\infty \frac{x^7}{e^x}\,dx?$$

Vihje: Huomaa, että $e^x > x^9$ kun x on kyllin suuri. (Muistatko syksyn kurssilta, mistä tämä seuraa?)

Ratkaisu. Merkitään

$$I = \int_1^\infty \frac{x^7}{e^x} dx.$$

Hyödynnetään tehtävän ratkaisussa vihjettä. On siis olemassa $M > 1$, jolle $e^x > x^9$, kun $x \geq M$. Jos siis $x \geq M$, niin pätee

$$0 < \frac{x^7}{e^x} < \frac{x^7}{x^9} = \frac{1}{x^2}.$$

Jaetaan integraali I kahteen osaan:

$$I = \underbrace{\int_1^M \frac{x^7}{e^x} dx}_{=I_1} + \underbrace{\int_M^\infty \frac{x^7}{e^x} dx}_{=I_2}.$$

Nyt integraali I_1 suppenee Riemann-integraalina. Integraalilla I_2 on majoranttina integraali $I_2' = \int_M^\infty \frac{1}{x^2} dx$. Olkoon $N > M$. Koska pätee

$$\int_M^N \frac{1}{x^2} dx = \Big/_{M}^{N} -\frac{1}{x} = -\frac{1}{N} + \frac{1}{M} \to \frac{1}{M},$$

kun $N \to \infty$, niin integraali I_2' suppenee ja edelleen integraali I_2 suppenee majoranttiperiaatteen nojalla. Koska integraalit I_1 ja I_2 suppenevat, niin myös integraali I suppenee niiden summana.

Huomautus: Vihjeen epäyhtälön voi todistaa käyttämällä apuna 1. ja 2. derivaattaa tai L'Hospitalin sääntöä.

6. Oletetaan, että funktion f kolmas derivaatta f''' on jatkuva välillä $]-1,1[$. Oletetaan, että $x \in]0,1[$. Sovella osittaisintegrointia edellisten harjoitusten tehtävän 6 tapaan tehtävän tulokseen ja johda yhtälö

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2}x^2 f''(0) + \text{integraali}.$$

(Huom: tulos pätee myös kun $x \in]-1,0[$.)

Ratkaisu. Edellisten harjoitusten tehtävän 6 ratkaisussa johdettiin tulos:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \int_0^x (x-t)f''(t)dt, \tag{1}$$

kun $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$ ja f'' on jatkuva välillä $]-1,1[$. Olkoon siis $x \in]0,1[$. Sovelletaan osittaisintegrointia integraaliin $\int_0^x (x-t)f''(t)dt$ tulkitsemalla $(x-t)$ polynomin $-\frac{1}{2}(x-t)^2$ derivaataksi muuttujan t suhteen. Tällöin saadaan siis

$$\int_0^x (x-t)f''(t)dt = \Big/_0^x -\frac{1}{2}(x-t)^2 f''(t) - \int_0^x -\frac{1}{2}(x-t)^2 f'''(t)dt$$
$$= (0 - (-\frac{1}{2}x^2 f''(0))) + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f'''(t)dt$$
$$= \frac{1}{2}x^2 f''(0) + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f'''(t)dt.$$

Sijoittamalla edellinen lauseke yhtälöön (1) saadaan tulos

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2}x^2 f''(0) + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f'''(t)dt,$$

kun $x \in]0,1[$.

Edellinen tulos pätee myös tapauksessa $x \in]-1,0[$. Jos siis $x \in]-1,0[$, niin soveltamalla osittaisintegrointia jälleen integraaliin $\int_0^x (x-t)f''(t)dt$ (ja tulkitsemalla $(t-x)$ polynomin $\frac{1}{2}(x-t)^2$ derivaataksi) saadaan

$$
\begin{aligned}
&\int_0^x (x-t)f''(t)dt = -\int_x^0 (x-t)f''(t)dt = \int_x^0 (t-x)f''(t)dt \\
&= \Big/_{x}^{0} \frac{1}{2}(x-t)^2 f''(t) - \int_x^0 \frac{1}{2}(x-t)^2 f'''(t)dt \\
&= (\frac{1}{2}x^2 f''(0)) - 0) + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f'''(t)dt \\
&= \frac{1}{2}x^2 f''(0) + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f'''(t)dt
\end{aligned}
$$

ja loppu menee sijoittamalla tämä yhtälöön (1) kuten aikaisemmin.

<u>Huomautus:</u> Tämä tehtävä ja edellisten harjoitusten tehtävä 6 havainnollistavat mielenkiintoisella tavalla sitä, että käyttämällä analyysin peruslausetta ja osittaisintegrointia päädytään sarjateorian perusteiden luo. Nimittäin jos funktiolla f olisi kaikkien kertalukujen derivaatat, voitaisiin osittaisintegrointia toistaa "loputtomiin" ja saataisiin funktiolle muodollinen sarjaesitys. Näin ollen joutuisimme määrittelemään, mitä kyseinen ääretön summa oikeastaan tarkoittaa. Tehtävän tuloksena saatu funktion f esitys liittyy oleellisesti Taylorin polynomeihin ja Taylorin kaavaan, jonka todistukseen kannattaa perehtyä (katso Lause 1.1 s. 102).