

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi II

Harjoitus 8

23. 3. 2009 alkavalle viikolle

Ohjauksiin osallistumisesta on luvassa lisäpisteitä: jos osallistuu 23.3. alkaen 4 - 5 ohjaukseen, niin saa 2 lisäpistettä ja osallistumalla 3 ohjaukseen saa yhden lisäpisteen.

1. Tarkastellaan funktioita $f_n :]-1, 2[\rightarrow \mathbb{R}$, jotka on määritelty ehdolla $f_n(x) = \frac{1}{n}x^2$. Suppeneeko jono (f_n) pisteittäin? Suppeneeko se tasaisesti?

2. Tarkastellaan funktioita $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, jotka on määritelty ehdolla $f_n(x) = \frac{1}{n}x^2$. Suppeneeko jono (f_n) pisteittäin? Suppeneeko se tasaisesti?

3. Tarkastellaan funktioita $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, jotka on määritelty ehdoilla $f_n(x) = n - n^2x$ kun $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ ja $f_n(x) = 0$ muuten. Suppeneeko jono (f_n) pisteittäin? Suppeneeko se tasaisesti? Onko olemassa raja-arvoa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx?$$

4. Laske

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (x^2 + \frac{1}{n} \sin(e^{\cos x})) dx.$$

Käytä tasaista suppenemista (tarkista se!)

5. Laske

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (1 + \frac{1}{n})^{nx} dx.$$

Käytä tasaista suppenemista (tarkista se!) Muista myös luvun e määritelmä.

6. Oletetaan, että $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ja määritellään funktiot $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ehdolla $f_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$.

(a) Oletetaan, että f on jatkuva. Osoita, että jono (f_n) suppenee pisteittäin.

(b) Oletetaan, että f on tasaisesti jatkuva. Osoita, että jono (f_n) suppenee tasaisesti.