MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Harjoitus 6
9. 3. 2009 alkavalle viikolle
Ratkaisuehdotuksia (Tiina Kainulainen)

Suppenevatko vai hajaantuvatko seuraavat sarjat? Tarkat perustelut!

1.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}.$$

Ratkaisu: Sarja hajaantuu. Tarkastellaan osasummia

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Mikäli harmonisen sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ hajaantuminen pidetään tunnettuna, niin nähdään heti, että tämänkin sarjan osasummat kasvavat rajatta, koska kyseessä on harmonisen sarjan osasumma kerrottuna vakiolla. Toisaalta hajaantuminen voidaan perustella esimerkiksi tutkimalla jonon (S_n) osajonoa (S_{2^m}) seuraavasti:

$$S_{2^m} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + \ldots + (\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^m})\right)$$

$$> \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{4=2^{3-1} \text{ kpl}}) + \ldots + (\underbrace{\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^m} + \ldots + \frac{1}{2^m}}_{2^{m-1} \text{ kpl}})\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(m+1) \to \infty, \text{ kun } m \to \infty.$$

Siispä jonolla (S_n) on hajaantuva osajono, joten koko jono hajaantuu.

2.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}.$$

Ratkaisu: Sarja hajaantuu. Nimittäin sarjan osasummille pätee

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$$

koska $0 < 2k-1 < 2k$ jokaisella $k = 1, 2, \ldots$, ja tehtävän 1. perusteella $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \to \infty$, kun $n \to \infty$. Siispä tässäkin osasummien jono hajaantuu.

3.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}.$$

Ratkaisu: Tämäkin sarja hajaantuu. Havaitaan nimittäin, että

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{\underbrace{2(n+1)-1}_{=2n+1}} - 1 = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k-1} - 1$$

Tehtävän 2. nojalla $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k-1} \to \infty$, kun $n \to \infty$, joten myös tässä osasummat kasvavat rajatta.

4.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+k}{1+k^2}.$$

Ratkaisu: Sarja hajaantuu. Arvioidaan ensin sarjan termejä alaspäin. Koska

$$\frac{1+k}{1+k^2} = \frac{1}{1+k^2} + \frac{k}{1+k^2} > \frac{k}{1+k^2} \geq \frac{k}{k^2+k^2} = \frac{k}{2k^2} = \frac{1}{2k} > 0$$

jokaisella $k = 1, 2, \ldots$, niin sarjan osasummille pätee

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1+k}{1+k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}.$$

Jälleen tehtävän 1. nojalla $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \to \infty$, kun $n \to \infty$, joten myös $S_n \to \infty$.

5.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+k}{1+k^3}.$$

Ratkaisu: Sarja suppenee. Arvioidaan ensin sarjan termejä:

$$0 < \frac{1+k}{1+k^3} = \frac{1}{1+k^3} + \frac{k}{1+k^3} < \frac{1}{k^3} + \frac{k}{k^3} = \frac{1}{k^3} + \frac{1}{k^2}.$$

Mikäli yliharmonisten sarjojen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ suppeneminen pidetään

tunnettuna, voidaan todeta, että lauseen III.1.9 nojalla myös niiden summa suppenee. Nyt

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1+k}{1+k^3} \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^3} + \frac{1}{k^2} \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^3} + \frac{1}{k^2} \right) \in \mathbb{R}.$$

Koska kyseessä on positiivisterminen sarja, niin sen osasummat muodostavat nousevan jonon, ja koska nyt on osoitettu että jonolla (S_n) on yläraja, niin se suppenee.

Perustellaan kuitenkin vielä tarkasti esimerkiksi sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ suppeneminen. (Toisen sarjan suppeneminen voidaan osoittaa samalla tavalla.) Tutkitaan aidosti vähenevää funktiota $x \mapsto \frac{1}{x^3}$. Jokaisella välillä $[k-1, k]$ (missä $k = 2, 3, \ldots$) funktio on positiivinen ja saa pienimmän arvonsa $\frac{1}{k^3}$ välin oikeanpuoleisessa päätepisteessä. Näin ollen

$$\int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^3} \geq \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{k^3} = \frac{1}{k^3} \Big/_{k-1}^{k} x = \frac{1}{k^3}$$

Ja edelleen

$$\int_{1}^{n} \frac{dx}{x^3} = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^3} \geq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3}.$$

Sarjan osasummille saadaan nyt yläraja:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3} \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^3} = 1 + \Big/_{1}^{n} \frac{-x^{-2}}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2} < \frac{3}{2}$$

jokaisella n. Jälleen positiivistermisen sarjan osasummien jono on nouseva, ja koska on osoitettu, että jonolla on yläraja $\frac{3}{2}$, niin se suppenee.

6.

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}.$$

Ratkaisu: Sarja hajaantuu. Osoitetaan tämä käyttämällä samaa ideaa kuin edellisessä tehtävässä, mutta nyt haluamme arvioida osasummia alaspäin. Koska $x \mapsto \ln x$ tiedetään aidosti kasvavaksi, on tässä tarkasteltava funktio $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ aidosti vähenevä ja saa välillä $[k, k+1]$ suurimman arvonsa välin vasemmanpuoleisessa päätepisteessä. Näin ollen jokaisella $k = 2, 3, \ldots$ pätee

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x \ln x} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{k \ln k} = \frac{1}{k \ln k}.$$

Siispä

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} \geq \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x \ln x} = \int_2^{n+1} \frac{dx}{x \ln x}$$

$$= \int_2^{n+1} \underbrace{\frac{1}{x}}_{=D \ln x} \cdot \frac{1}{\ln x} \, dx = \Big/_{2}^{n+1} \ln(\ln x) = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2).$$

Koska $\ln(\ln(n+1)) \to \infty$, kun $n \to \infty$, niin sarja hajaantuu.