Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Analyysi
Harjoitus 4, kevät 2009
Ratkaisuehdotuksia, Aapo Tevanlinna

1. Laske

$$\int_2^3 (\frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x^2+1}{x+1})dx.$$

Ratkaisu: Muokataan ensin integroitava mukavampaan muotoon ja sitten vasta integroidaan:

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x^2+1}{x+1}\ dx &= \int_2^3 \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} + \frac{x^2-1+2}{x+1}\ dx \\
&= \int_2^3 \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} + \frac{(x+1)(x-1)+2}{x+1}\ dx \\
&= \int_2^3 \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} + (x-1) + \frac{2}{x+1}\ dx \\
&= \Big/_{2}^{3} \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x + \frac{1}{2}(x-1)^2 + 2\ln(x+1) \\
&= \frac{1}{2}\ln 10 + \arctan 3 + \frac{1}{2}2^2 + 2\ln 4 \\
&\ -\frac{1}{2}\ln 5 - \arctan 2 - \frac{1}{2}1^2 - 2\ln 3 \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{10}{5} + \overline{arc}\tan 3 - \overline{arc}\tan 2 + \frac{3}{2} + 4\ln 2 - 2\ln 3 \\
&= \frac{9}{2}\ln 2 - 2\ln 3 + \overline{arc}\tan - \overline{arc}\tan 2 + \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

2. Laske

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}-1}^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1} \sqrt{-x^2-2x+1}\ dx.$$

Ratkaisu: Muunnetaan väkisin neliöjuuressa oleva lauseke ensin muotoon $2(1-p(x)^2)$:

$$\begin{aligned}
-x^2-2x+1 &= -x^2-2x-1+2 = 2-(x+1)^2 \\
&= 2(1-\frac{(x+1)^2}{2}) = 2(1-(\frac{(x+1)^2}{(\sqrt{2})^2})) \\
&= 2(1-p(x)^2),
\end{aligned}$$

missä $p(x) = \frac{(x+1)}{\sqrt{2}}$. Sijoitetaan seuraavaksi $p(x) = \sin t$. Uusi alaraja on tällöin $t_0 = \overline{arc}\sin((\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + 1)/\sqrt{2}) = \overline{arc}\sin\frac{1}{2} = \pi/6$ ja uusi yläraja on $t_1 = \overline{arc}\sin((\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - 1 + 1)/\sqrt{2}) = \overline{arc}\sin\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi/3$ sekä $dx = \sqrt{2}\cos t\ dt$. Pitämällä sinin ja kosinin toisten potenssien laskusääntöjä tunnettuina on integraali helppo laskea:

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}-1}^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1} \sqrt{-x^2 - 2x + 1}\ dx &= \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}-1}^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1} \sqrt{2}\sqrt{1 - p(x)^2}\ dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{2}\sqrt{1 - \sin^2 t}\sqrt{2}\cos t\ dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2\cos^2 t\ dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2\frac{1}{2}(1 + \cos 2t)\ dt \\
&= \Big/_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} t + \frac{1}{2}\sin 2t \\
&= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}(\sin\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{6}) \\
&= \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \cdot 0 \\
&= \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

3. Määritä seurauslauseen 9.11 avulla funktion $f(x) = x^2$ kohtien $x = 0$ ja $x = 1$ väliin jäävän kuvaajan osan pituus.

Ratkaisu: Funktio f on selvästi derivoituva ja sen derivaatta on $2x$, joten seurauslauseeseen 9.11 oletukset ovat voimassa ja kuvaajan pituudeksi saadaan

$$\ell(f) = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}\ dx = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}\ dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\ dx.$$

Sijoitetaan $x = 1/2\sinh t$: Uusi alaraja on tällöin $t_0 = \text{arsinh}\ 2 \cdot 0 = \ln(0 + \sqrt{0^2 + 1}) = \ln 1 = 0$ ja uusi yläraja on $t_1 = \text{arsinh}\ 2 \cdot 1 =$

$\ln(2+\sqrt{2^2+1}))) = \ln(2+\sqrt{5})$ sekä $dx = 1/2 \cosh t \; dt$. Siis

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\; dx &= \int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} \sqrt{1+4(\frac{\sinh t}{2})^2}\; dt \\
&= \int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} \sqrt{1+\sinh^2 t}\; \frac{1}{2}\cosh t\; dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} \cosh^2 t\; dt \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} e^{2t}+2+e^{-2t}\; dt \\
&= \frac{1}{8} \Big/_{0}^{\ln(2+\sqrt{5})} \frac{1}{2}e^{2t}+2t-\frac{1}{2}e^{-2t} \\
&= \frac{1}{8} \Big/_{0}^{\ln(2+\sqrt{5})} \frac{1}{2}(e^{t})^2+2t-\frac{1}{2}(e^{-t})^2 \\
&= \frac{1}{8}[(\frac{1}{2}(2+\sqrt{5})^2+2\ln(2+\sqrt{5})-\frac{1}{2(2+\sqrt{5})^2} \\
&\quad -(\frac{1}{2}\cdot 1^2+2\cdot 0-\frac{1}{2\cdot 1^2})] \\
&= \frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})+\frac{1}{16}(9+4\sqrt{5}-(9-4\sqrt{5})) \\
&= \frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})+\frac{1}{2}\sqrt{5}
\end{aligned}$$

Kts. 2. harjoitukset (samanlainen integrointi)

4.Miksi

$$\int_1^2 \frac{x}{x^2-1}\; dx$$

täytyy tulkita epäoleelliseksi integraaliksi? Suppeneeko vai hajaantuuko se?

Ratkaisu: Funktio $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ ei ole määritelty, kun $x = 1$ ja toisaalta se ei ole (edes) rajoitettu välillä $[1, 2]$ (kts. Riemann-integraalin määritelmä). Funktio f on tosin integroituva jokaisella suljetulla välillä $[a, 2]$, jossa $1 < a < 2$, joten tehtävän integraali on tulkittavissa epäoleellisena integraalina, mikäli on olemassa äärellinen raja-arvo

$$\lim_{a\to 1}\int_a^2 \frac{x}{x^2-1}\; dx.$$

Integroidaan:

$$\int_a^2 \frac{x}{x^2-1}\ dx = \frac{1}{2} \Big/_{a}^{2} \ln(x^2-1) = \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln(a^2-1))$$

Analyysi I kurssilla on todistettu, että $\ln|t| \to -\infty$, kun $t \to 0$. Toisaalta $a^2 - 1 \to 0$, kun $a \to 1$, joten

$$\lim_{a\to 1} \int_a^2 \frac{x}{x^2-1}\ dx = \lim_{a\to 1} \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln(a^2-1)) = \infty.$$

Näin ollen epäoleellinen integraali hajaantuu ja tehtävän integraali ei ole määritelty.

5. Oletetaan, että $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ on aidosti kasvava ja derivoituva välillä $[1,3]$. Oletetaan lisäksi, että $f(1) = 2, f(3) = 5$ ja että $\int_1^3 f(t)dt = 8$. Laske käänteisfunktion integraali

$$\int_2^5 f^{-1}(x)\ dx$$

Ratkaisu: Kannattaa ehkä ensin ajatella asiaa visuaalisesti. Funktion f integraali yli välin $[1,3]$ on sen alueen pinta-ala, jota rajoittaa funktion f kuvaaja, x-akseli sekä suorat $x = 1$ ja $x = 3$. Käänteisfunktion f^{-1} integraaliksi tulee sen alueen pinta-ala, jota rajoittavat funktion f kuvaaja, y-akseli sekä suorat $y = 2$ ja $y = 5$. Miksi?

Ensin täytyy osoittaa käänteisfunktion f^{-1} olemassaolo vaikka se onkin aika ilmeinen asia. Funktion f aidosta kasvavuudesta johtuen maalijoukko voidaan supistaa väliksi $[2,5] = [f(1), f(3)]$. Nyt funktio f on bijektio $[1,3] \to [2,5]$, sillä injektiivisyys seuraa aidosta kasvavuudesta ja surjektiivisuus Bolzanon lauseesta. Funktiolla f on siis käänteisfunktio $f^{-1} : [2,5] \to [1,3]$, jolle siis $x = f^{-1}(f(x))$. Voimme nyt laskea tehtävän integraalin:

$$\begin{aligned}\int_2^5 f^{-1}(x)\ dx &= \int_1^3 f^{-1}(f(t))f'(t)\ dt = \int_1^3 tf'(t)\ dt \\ &= \Big/_{1}^{3} tf(t) - \int_1^3 f(t)\ dt = 3f(3) - 1f(1) - 8 \\ &= 15 - 2 - 8 = 5.\end{aligned}$$

Edellä on suoritettu sijoitus $x = f(t)$ (uudet rajat $t_0 = f^{-1}(2) = 1$ ja $t_1 = f^{-1}(5) = 3$ sekä $dx = f'(t)dt$), minkä jälkeen onosittaisintegroitu.

6. Oletetaan, että funktion f toinen derivaatta f'' on jatkuva välillä $]-1,1[$. Tällöin

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\ dt = f(0) + xf'(0) + \int_0^x jotain\ dt,$$

kun $x \neq 0$.

Todistus: Osoitetaan ensin, että vasemmanpuoleinen yhtälö pätee, kun $x \in]0,1[$ ja johdetaan siitä oikeanpuoleinen yhtälö. Olkoon siis $x \in]0,1[$. Funktio f on eräs derivaattafunktion f' integraalifunktio, joten analyysin peruslauseen nojalla

$$\int_0^x f'(t)\ dt = f(x) - f(0) \Leftrightarrow f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\ dt.\ (*)$$

Toisaalta, jos edellisessä ajatellaan $f'(t) = 1 \cdot f'(t)$, missä 1 on polynomin $-(x-t)$ derivaatta t:n suhteen, voimme osittaisintegroida termin $\int_0^x f'(t)\ dt$.

$$\begin{aligned}\int_0^x f'(t)\ dt = \int_0^x 1 \cdot f'(t)\ dt &= \Big/_0^x -(x-t)f'(t) - \int_0^x -(x-t)f''(t)\ dt \\ &= (0 \cdot f'(x) + xf'(0)) + \int_0^x (x-t)f''(t)\ dt \\ &= xf'(0) + \int_0^x (x-t)f''(t)\ dt\end{aligned}$$

Näin ollen siis (*) saa muodon

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\ dt = f(0) + xf'(0) + \int_0^x (x-t)f''(t)\ dt,$$

mikä olikin haluttu muoto.

Jos taas $x \in]-1,0[$ on analyysin peruslauseen nojalla

$$\int_x^0 f'(t)\ dt = f(0) - f(x) \Leftrightarrow f(x) = f(0) - \int_x^0 f'(t)\ dt = f(0) + \int_0^x f'(t)\ dt,$$

joten päättely tästä eteenpäin sujuu vastaavalla tavalla kuin tapauksessa $x \in]0,1[$.

Huomatus tehtävään: Mikäli f olisi ollut esimerkiksi 6 kertaa derivoituva, osittaisintegroinnin olisi voinut suorittaa 5 kertaa. Kts. Taylorin polynomit.