MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi II
Harjoitus 11
Ratkaisuehdotuksia Aapo Tevanlinna

1. Laske sivun 104 esimerkin tapaan sellainen likiarvo luvulle e, että virheen itseisarvo on pienempi kuin 10^{-5}.

Ratkaisu:
Huomataan ensin, että funktiolle $f(x) = e^x$ pätee $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ja $f^{(n)} = e^x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{N}$. Näin ollen asettamalla $x_0 = 0$ saadaan kaikilla $x \in \mathbb{R}$ funktiolle f esitys Taylorin kaavasta

$$f(x) = T_{n-1}(x;0) + R_n(x;0),$$

missä $R_n(x;0) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-0)^n$ on Lagrangen jäännöstermi ja ξ on lukujen 0 ja x välissä. Sijoitetaan nyt $x = 1$, jolloin äskeisestä saadaan

$$\begin{aligned} &e = f(1) = T_{n-1}(1;0) + R_n(1;0) \iff e - T_{n-1}(1;0) = R_n(1;0) \\ &\implies |e - T_{n-1}(1;0)| = |R_n(1;0)|. \end{aligned}$$

Etsitään sitten sellainen $n \in \mathbb{N}$, että $|R_n(1;0)| < 10^{-5}$:

$$|R_n(1;0)| = |\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(1-0)^n| = |\frac{e^\xi}{n!}1^n| < \frac{e^1}{n!} < \frac{3}{n!} < 0,85 \cdot 10^{-5} < 10^{-5},$$

kun $n \geq 9$. Näin ollen siis $T_8(1;0)$ arvioi lukua e halutun tarkasti ja sen arvo voidaan laskea:

$$\begin{aligned} T_8(1;0) &= f(0) + \sum_{k=1}^{8} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(1-0)^k = 1 + \sum_{k=1}^{8} \frac{1}{k!} \\ &= 1 + 1/1! + 1/2! + \cdots + 1/8! = \frac{109601}{40320} = 2,7182787.., \end{aligned}$$

jossa $|\text{virhe}| < 0,85 \cdot 10^{-5}$. Kun luku pyöristetään kuuden desimaalin tarkkuuteen on $|\text{pyöristysvirhe}| < 0,05 \cdot 10^{-5}$, jolloin kokonaisvirhe $< (0,85 + 0,05) \cdot 10^{-5} < 10^{-5}$, joka tarkoittaa, että $e \approx 2,718279$ on riittävä arvio.

2. Laske sivun 110 esimerkin tapaan sellainen likiarvo integraalille

$$\int_0^1 e^{x^3}\, dx,$$

että virheen itseisarvo on pienempi kuin 0,01.

Ratkaisu:
Taylorin kaavasta saadaan

$$e^y = T_{n-1}(y;0) + R_n(y;0) = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \cdots + \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^{\xi}}{n!}y^n,$$

missä luku ξ on lukujen 0 ja y välissä. Sijoittamalla $y = x^3$ saadaan

$$\begin{aligned} e^{x^3} &= T_{n-1}(x^3;0) + R_n(x^3;0) \\ &= 1 + x^3 + \frac{x^6}{2!} + \cdots + \frac{x^{3(n-1)}}{(n-1)!} + \frac{e^{\xi}}{n!}x^{3n},\ 0 < \xi < x^3 \end{aligned}$$

Nyt $0 < x \leq 1 \Longrightarrow 0 < \xi < x^3 \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq R_n(x^3;0) = \frac{e^{\xi}}{n!}(x^3-0)^n \leq \frac{e}{n!}x^{3n}$, joten virhetermin integraalille saadaan arvio

$$\begin{aligned} \int_0^1 R_n(x^3;0)dx \leq \frac{e}{n!}\int_0^1 x^{3n}dx = \frac{e}{n!} \Big/_0^1 \frac{x^{3n+1}}{3n+1} = \frac{e}{n!(3n+1)} \\ < 0,009 < 0,01 \Longleftrightarrow n \geq 4. \end{aligned}$$

Näin ollen haetuksi likiarvoksi integraalille kelpaa

$$\begin{aligned} \int_0^1 T_3(x^3;0)dx &= \int_0^1 (1 + x^3 + \frac{x^6}{2!} + \frac{x^9}{3!})dx = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{14} + \frac{1}{60} \\ &= \frac{4496}{3360} = 1,338095.., \end{aligned}$$

joka voidaan pyöristää kolmen desimaalin tarkkuuteen, sillä silloin kokonaisvirhe $< (0,0005 + 0,009) < 0,01$. Arvioksi integraalille kelpaa siis $1,338$.

3. Muodosta funktiolle $f(x) = \ln x$ Taylorin polynomi $\mathrm{T}_2(x;e)$ ja selvitä sen avulla

$$\lim_{x\to e} \frac{\frac{x}{e} - \ln x}{(x-e)^2}.$$

Osaatko selvittää myös raja-arvon

$$\lim_{x\to e} \frac{x - \ln x^e}{(x-e)^2}?$$

Ratkaisu:
Kun $x > 0$ on $f^{(1)}(x) = \frac{1}{x}$, $f^{(2)} = -\frac{1}{x^2}$, $f^{(3)} = \frac{2}{x^3}$ ja $f(e) = 1$. Tällöin

$$T_2(x;e) = 1 + \sum_{k=1}^{2} \frac{f^{(k)}(e)}{k!}(x-e)^k = 1 + \frac{1}{e}(x-e) - \frac{1}{2e^2}(x-e)^2$$

ja

$$R_3(x;e) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-e)^3 = \frac{2}{\xi^3 \cdot 3!}(x-e)^3$$

jollain lukujen x ja e välissä olevalla luvulla ξ. Haluttu raja-arvo on siis

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to e} \frac{\frac{x}{e} - \ln x}{(x-e)^2} &= \lim_{x\to e} \frac{\frac{x}{e} - (T_2(x;e) + R_3(x;e))}{(x-e)^2} \\
&= \lim_{x\to e} \frac{\frac{x}{e} - T_2(x;e)}{(x-e)^2} - \lim_{x\to e} \frac{R_3(x;e)}{(x-e)^2} \\
&= \lim_{x\to e} \frac{\frac{x}{e} - (1 + \frac{1}{e}(x-e) - \frac{1}{2e^2}(x-e)^2)}{(x-e)^2} \\
&- \lim_{x\to e} \frac{\frac{2}{\xi^3 \cdot 3!}(x-e)^3}{(x-e)^2} \\
&= \lim_{x\to e} \frac{\frac{x}{e} - 1 - \frac{1}{e}(x-e) + \frac{1}{2e^2}(x-e)^2}{(x-e)^2} \\
&- \lim_{x\to e} \frac{2(x-e)}{\xi^3 \cdot 3!} \\
&= \lim_{x\to e} \frac{\frac{1}{2e^2}(x-e)^2}{(x-e)^2} - 0 \\
&= \frac{1}{2e^2}.
\end{aligned}$$

Toinen raja-arvo ratkeaa edellisestä huomaamalla, että

$$\lim_{x\to e} \frac{x - \ln x^e}{(x-e)^2} = e(\lim_{x\to e} \frac{\frac{x}{e} - \ln x}{(x-e)^2}) = e \cdot \frac{1}{2e^2} = \frac{1}{2e}.$$

4. Muodosta funktiolle $f(x) = e^x$ Taylorin polynomi $\mathrm{T}_2(x;1)$ ja selvitä sen avulla

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e\,x}{(x-1)^2}.$$

Ratkaisu:
Edetään kuten edellisessä tehtävässä:

$$T_2(x;1) = f(1) + \sum_{k=1}^{2} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k = e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2$$

ja

$$R_3(x;1) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-1)^3 = \frac{e^\xi}{6}(x-1)^3,$$

jollain luvulla ξ, joka on lukujen 1 ja x välissä. Raja-arvo voidaan nyt laskea:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{e^x - e\,x}{(x-1)^2} &= \lim_{x\to 1}\frac{T_2(x;1)+R_3(x;1)-e\,x}{(x-1)^2}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{T_2(x;1)-e\,x}{(x-1)^2} + \lim_{x\to 1}\frac{R_3(x;1)}{(x-1)^2}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{e+e(x-1)+\frac{e}{2}(x-1)^2-e\,x}{(x-1)^2} + \lim_{x\to 1}\frac{\frac{e^\xi}{6}(x-1)^3}{(x-1)^2}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{e}{2}(x-1)^2}{(x-1)^2} + \lim_{x\to 1}\frac{e^\xi}{6}(x-1)\\
&= \frac{e}{2}.
\end{aligned}$$

5. Muodosta funktiolle $f(x) = \sqrt{x}$ Taylorin polynomi $\mathrm{T}_2(x;4)$ ja selvitä sen avulla raja-arvo

$$\lim_{x\to 4}\frac{4\sqrt{x}-(x+4)}{(x-4)^2}.$$

Ratkaisu:
Edetään jälleen samaan tyyliin. $f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, $f^{(2)}(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$ ja $f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$, joten

$$\begin{aligned}
T_2(x;4) &= f(4) + \sum_{k=1}^{2}\frac{f^{(k)}(4)}{k!}(x-4)^k = 2 + \frac{1}{2}4^{-\frac{1}{2}}(x-4) - \frac{\frac{1}{4}4^{-\frac{3}{2}}}{2}(x-4)^2\\
&= 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2
\end{aligned}$$

ja

$$R_3(x;4) = \frac{\frac{3}{8}\xi^{-\frac{5}{2}}}{3!}(x-4)^3 = \frac{\xi^{-\frac{5}{2}}}{16}(x-4)^3,$$

jollain luvulla ξ, joka on lukujen 4 ja x välillä. Lasketaan sitten raja-arvo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 4}\frac{4\sqrt{x}-(x+4)}{(x-4)^2} &= \lim_{x\to 4}\frac{4(T_2(x;4)+R_3(x;4))-(x+4)}{(x-4)^2}\\
&= \lim_{x\to 4}\frac{4T_2(x;4)-(x+4)}{(x-4)^2}+\lim_{x\to 4}\frac{4R_3(x;4)}{(x-4)^2}\\
&= \lim_{x\to 4}\frac{4(2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2)-(x+4)}{(x-4)^2}\\
&+ \lim_{x\to 4}\frac{4(\frac{\xi^{-\frac{5}{2}}}{16}(x-4)^3)}{(x-4)^2}\\
&= \lim_{x\to 4}\frac{8+x-4-\frac{1}{16}(x-4)^2)-x-4}{(x-4)^2}+0\\
&= -\frac{1}{16}
\end{aligned}$$

6. Funktioiden $\cos x$ ja $2-\cosh x$ kuvaajat kulkevat lähellä toisiaan kun x on lähellä kohtaa $x=0$. (Piirrä jos mahdollista näiden kuvaajat esim. välillä $[-1/2, 1/2]$.) Yritä selittää ilmiö tutkimalla Taylorin polynomien avulla erotusfunktiota $f(x)=\cos x-(2-\cosh x)$.

Ratkaisu:
Tutkitaan funktion $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=2-\cosh x$ ja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\cos x$ Taylorin kaavoja kehityskeskuksella 0. Tunnetusti $D\cosh x=\sinh x$ ja $D\sinh x=\cosh x$, joten

$$\begin{aligned}
T^h_{n-1}(x;0)+R^h_n(x;0) &= h(0)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{h^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k+\frac{h^{(n)}(\xi_1)}{n!}x^n\\
&= 1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{k!}x^k+\frac{h^{(n)}(\xi_1)}{n!}x^n,
\end{aligned}$$

missä kertoimet a_k vastaavat jonon $(a_k)_{k=1}^{\infty}=(-\sinh 0,-\cosh 0,-\sinh 0,\ldots)=(0,-1,0,-1,0,-1,\ldots)$ jäseniä, ja luku ξ_1 on lukujen 0 ja x välissä.

Kosinille on myös esitys Taylorin kaavana

$$\begin{aligned}
T^g_{n-1}(x;0)+R^g_n(x;0) &= g(0)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k+\frac{g^{(n)}(\xi_2)}{n!}x^n\\
&= 1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{b_k}{k!}x^k+\frac{g^{(n)}(\xi_2)}{n!}x^n,
\end{aligned}$$

missä kertoimet b_k arvot vastaavat jonon $(b_k)_{k=1}^{\infty}=(0,-1,0,1,0,-1,\ldots)$ jäseniä ja ξ_2 on lukujen 0 ja x välissä.

Tutkitaan seuraavaksi erotusfunktiota $f(x) = g(x) - h(x)$ Taylorin kaavoilla

$$
\begin{aligned}
T^g_{n-1}(x;0) + R^g_n(x;0) - T^h_{n-1}(x;0) - R^h_n(x;0) \\
&= (T^g_{n-1}(x;0) - T^h_{n-1}(x;0)) + (R^g_n(x;0) - R^h_n(x;0)) \\
&= (1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k}{k!}x^k - (1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{k!}x^k)) + (R^g_n(x;0) - R^h_n(x;0)) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k - a_k}{k!}x^k + (R^g_n(x;0) - R^h_n(x;0)).
\end{aligned}
$$

Huomataan, että $b_k = -a_k$, kun $k = 4, 8, 12, \ldots$ ja $b_k = a_k$ muulloin. Jos nyt esimerkiksi $n = 6$ saadaan äskeiselle kohtalaisen hyvä arvio

$$
\begin{aligned}
|\sum_{k=1}^{6-1} \frac{b_k - a_k}{k!}x^k + (R^g_6(x;0) - R^h_6(x;0))| &= |\frac{2}{4!}x^4 + (\frac{g^{(6)}(\xi_2)}{6!}x^6 - \frac{h^{(6)}(\xi_1)}{6!}x^6)| \\
&= |\frac{2}{4!}x^4 + (\frac{-\cos\xi_2}{6!}x^6 - \frac{-\cosh\xi_1}{6!}x^6)| \\
&= |\frac{1}{12}x^4 + \frac{-\cos\xi_2 + \cosh\xi_1}{6!}x^6| \\
&= \frac{1}{12}x^4 + \frac{-\cos\xi_2 + \cosh\xi_1}{6!}x^6 \\
&.
\end{aligned}
$$

Oletetaan nyt lisäksi, että $|x| < 1$, jolloin

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{12}x^4 + \frac{-\cos\xi_2 + \cosh\xi_1}{6!}x^6 &\leq \frac{1}{12}x^4 + \frac{1 + \frac{e^{\xi_1} + e^{-\xi_1}}{2}}{6!}x^6 \\
&\leq \frac{1}{12}x^4 + \frac{1 + \frac{3 + \frac{1}{2}}{2}}{6!}x^6 \\
&= \frac{1}{12}x^4 + \frac{11}{4 \cdot 6!}x^6 \\
&= \frac{1}{12}x^4 + \frac{11}{2880}x^6.
\end{aligned}
$$

Eli tehtävän funktio f kulkee nollan ja polynomin $\frac{1}{12}x^4 + \frac{11}{2880}x^6$ välillä, kun $|x| < 1$. Jääköön lukijalle etsittäväksi parempia arvioita (niitä nimittäin löytyy kunhan vain kasvattaa n:ää), mikäli mielenkiintoa tähän aikaan vuodesta vielä riittää :-)

HYVÄÄ KESÄÄ KAIKILLE!