MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Ohjaus 6 (Kertaus 1. välikoetta varten) / Ratkaisuehdotuksia (RT)
23. - 25.2.2009

Huom: Tässä on enemmän laskettavaa kuin kurssikokeeseen mahtuu. Ohjauksissa voi valita tehtävistä 2 ja 3 joko(a) tai (b) kohdan ellei aika riitä molempiin.

1. Laske

$$\int_0^{\pi/3} e^{\sin^2 x} \sin x \cos x \, dx.$$

Ratkaisu. Lasketaan yhdistetyn funktion * $f(x) = e^{\sin x^2}$ derivaatta: $D(e^{\sin x^2}) = e^{\sin x^2} \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$, jolloin tehtävän integraali voidaan laskea ilman ongelmia:

$$\int_0^{\pi/3} e^{\sin^2 x} \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} e^{\sin^2 x} \cdot 2 \sin x \cos x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \overset{\pi/3}{\underset{0}{\Big/}} e^{\sin x^2} = \frac{1}{2}\big(e^{\sin^2(\pi/3)} - \overbrace{e^{\sin^2 0}}^{=e^0=1}\big)$$

$$= \frac{1}{2}\big(e^{(\sqrt{3}/2)^2} - 1\big) = \frac{1}{2}\big(e^{3/4} - 1\big).$$

* Huomaa, että kyseessä on kolmen funktion yhdiste (eli yhdistetyn funktion derivointikaavaa täytyy käyttää kahteen kertaan): $f(x) = g_1 \circ g_2 \circ g_3(x)$, missä $g_1(x) = e^x$, $g_2(x) = \sin x$ ja $g_3(x) = x^2$.

2. (a) Laske

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x \, dx.$$

Ratkaisu. Lasketaan tehtävän integraali käyttämällä osittaisintegrointikaavaa

$$\int_a^b f g' = \overset{b}{\underset{a}{\Big/}} f g - \int_a^b f' g.$$

Nyt

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x\, dx \overset{(*)}{=} \Big/_0^{\pi/2} x^2(-\cos x) - \int_0^{\pi/2} 2x(-\cos x)\, dx$$

$$= - \Big/_0^{\pi/2} x^2 \cos x + 2\int_0^{\pi/2} x \cos x\, dx$$

$$\overset{(**)}{=} -\Big((\pi/2)^2 \overbrace{\cos(\pi/2)}^{=0} - 0 \cdot \cos 0\Big) + 2\Big(\Big/_0^{\pi/2} x \sin x - \int_0^{\pi/2} 1 \cdot \sin x\, dx\Big)$$

$$= 2\big(\frac{\pi}{2} \cdot \overbrace{\sin \frac{\pi}{2}}^{=1} - 0 \cdot \sin 0 + \Big/_0^{\pi/2} \cos x\big)$$

$$= 2\big(\frac{\pi}{2} + (\overbrace{\cos \frac{\pi}{2}}^{=0} - \overbrace{\cos 0}^{=1})\big) = \pi - 2.$$

$(*)$ Tässä siis valittu $f(x) = x^2$ ja $g'(x) = \sin x$, jolloin $f'(x) = 2x$ ja $g(x) = -\cos x$.
$(**)$ Tässä taas $f(x) = x$ ja $g'(x) = \cos x$, jolloin $f'(x) = 1$ ja $g(x) = \sin x$.

(b) Tarkastellaan funktiota $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, jolle pätee $f(x) = x^2 \sin x$ kun $0 \le x \le \pi/2$. Anna esimerkki välin $[0, \frac{\pi}{2}]$ jaosta D, jolla pätee $S_D - s_D < 2^{-100}$. Perustelu!

Ratkaisu. Koska $f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x \ge 0$ kaikilla $x \in [0, \pi/2]$, niin $f(x)$ on kasvava välillä $[0, \pi/2]$. Olkoon $D = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$, missä $x_0 = 0$ ja $x_n = \pi/2$, tasavälinen jako siten, että $l(\triangle_k) = \frac{\pi}{2} : n = \frac{\pi}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, kaikilla $\triangle_k = [x_k, x_{k-1}]$, $k = 1, .., n$.
Nyt

$$s_D = \sum_{k=1}^{n} g_k \cdot l(\triangle_k) = f(x_0) \cdot \frac{\pi}{2n} + f(x_1) \cdot \frac{\pi}{2n} + ... + f(x_{n-1}) \cdot \frac{\pi}{2n}$$
$$= \frac{\pi}{2n}\big(f(0) + f(\frac{1 \cdot \pi}{2n}) + ... + f(\frac{(n-1)\pi}{2n})\big)$$

ja

$$S_D = \sum_{k=1}^{n} G_k \cdot l(\triangle_k) = f(x_1) \cdot \frac{\pi}{2n} + f(x_2) \cdot \frac{\pi}{2n} + ... + f(x_n) \cdot \frac{\pi}{2n}$$
$$= \frac{\pi}{2n}\big(f(\frac{1 \cdot \pi}{2n}) + f(\frac{2 \cdot \pi}{2n}) + ... + f(\frac{(n-1)\pi}{2n}) + \overbrace{f(\frac{n\pi}{2n})}^{=f(\frac{\pi}{2})}\big).$$

Siten

$$S_D - s_D = \frac{\pi}{2n}\big(f(\frac{\pi}{2}) - f(0)\big) = \frac{\pi}{2n}\big((\frac{\pi}{2})^2 \overbrace{\sin \frac{\pi}{2}}^{=1} - 0^2 \cdot \sin 0\big)$$
$$= \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^3}{8n}.$$

Kun $n > \frac{2^{100}\cdot\pi^3}{8}$, esimerkiksi valitsemalla $n = 4 \cdot 2^{100}$, saadaan haluttu tulos

$$S_D - s_D = \frac{\pi^3}{8n} < 2^{-100}.$$

3. Suppeneeko vai hajaantuuko

$$(a) \int_0^1 \sqrt{\frac{x+1}{x^2+2x}}\, dx?$$

Ratkaisu. Todetaan ensin, että $\sqrt{\frac{x+1}{x^2+2x}} > 0$ kaikilla $x \in]0,1]$. Käytetään integraalin suppenemisen tutkimiseen vihjeessä mainittua *vertailutestiä* (luentomoniste s. 53, Seuraus 2.3.). Valitaan vertailufunktioksi $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, joka on positiivinen kaikilla $x \in]0,1]$, joten vertailutestin ehdot täyttyvät molempien funktioiden f ja g osalta. Nyt

$$\frac{1}{\sqrt{x}} : \sqrt{\frac{x+1}{x^2+2x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}} \longrightarrow^{x\to 0^+} \sqrt{2} \neq 0, \infty.$$

Toisaalta tiedetään (ks. Esimerkki 1.8., luentomoniste s.49), että $\int_0^1 \frac{dx}{x^s}$ suppenee $\Leftrightarrow$ $s < 1$, joten $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ suppenee. Vertailutestin mukaan myös $\int_0^1 \sqrt{\frac{x+1}{x^2+2x}}\, dx$ suppenee.

$$(b) \int_1^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx?$$

Ratkaisu. Käytetään tässäkin vertailutestiä tehtävän integraalin suppenemisen tutkimiseen (selvästi $f(x) = \frac{x^2+1}{x^4+1} > 0$ kaikilla $x \in [1,\infty[$). Valitaan nyt vertailufunktioksi $g(x) = \frac{1}{x^2}$ ja todetaan, että $g(x)$ saa vain positiivisia arvoja välillä $[1,\infty[$. Nyt

$$\frac{x^2+1}{x^4+1} : \frac{1}{x^2} = \frac{x^4+x^2}{x^4+1} = \frac{x^4(1+\frac{1}{x^2})}{x^4(1+\frac{1}{x^4})} = \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^4}} \longrightarrow^{x\to\infty} 1 \neq 0, \infty.$$

Koska $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx$ suppenee (ks. Esimerkki 1.2., luentomoniste s.47), niin vertailutestin nojalla $\int_1^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx$ suppenee.

4. Määritellään funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ehdolla

$$f(x) = \sin(x^2)$$

Onko f tasaisesti jatkuva kaikkien reaalilukujen joukossa?

Ratkaisu.

Jos nyt valitaan $x = \sqrt{\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi}$ ja $y = \sqrt{-\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi}$, missä $n \geq 1$ on kokonaisluku, niin

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &= |\sin(x^2) - \sin(y^2)| = |\sin(\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi) - \sin(-\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi)| \\ &= |1 - (-1)| = 2.\end{aligned}$$

Toisaalta, koska $0 < y < x$, niin

$$\begin{aligned}|x - y| &= \sqrt{\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi} - \sqrt{-\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi} \\ &= \frac{\left(\sqrt{\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi} - \sqrt{-\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi}\right)\left(\sqrt{\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi} + \sqrt{-\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi}\right)}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi} + \sqrt{-\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi}} \\ &= \frac{\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi - (-\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi)}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi} + \sqrt{-\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi}} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi} + \sqrt{-\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi}} \equiv (*).\end{aligned}$$

Nimittäjää pienentämällä yllä olevan yhtälöketjun viimeistä muotoa $(*)$ voidaan arvioida ylöspäin ja saadaan:

$$|x - y| \leq \frac{\pi}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi}} \leq \frac{\pi}{\sqrt{n \cdot 2\pi}}.$$

Nyt $|x - y| < \delta$, kun $\delta > 0$ on mielivaltainen, aina kun $n > \frac{\pi}{2\delta^2}$. Olemme osoittaneet, että esimerkiksi valinnalla $\epsilon = 1$ ei löydy sellaista $\delta > 0$, että $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ aina kun $|x - y| < \delta$ pätisi kaikilla $x \in \mathbb{R}$ (ks. tasaisen jatkuvuuden määritelmä, luentomoniste s.6-7). Näin ollen $f(x) = \sin(x^2)$ ei voi olla tasaisesti jatkuva koko reaalilukujen joukossa.