MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Harjoitus 3 / Ratkaisuehdotuksia (RT)
4.-6.2.2009

1. Laske

$$\int_0^{\sqrt{e}} \frac{x}{x^2+e}\,dx.$$

Ratkaisu.

$$\int_0^{\sqrt{e}} \frac{x}{x^2+e}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{e}} \frac{2x}{x^2+e}\,dx = \frac{1}{2} \Big/_0^{\sqrt{e}} \ln|x^2+e|$$

$$= \frac{1}{2}\big(\ln((\sqrt{e})^2+e) - \ln(0+e)\big) = \frac{1}{2}\big(\ln 2e - \overbrace{\ln e}^{=1}\big)$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\big(\ln 2 + \overbrace{\ln e}^{=1} - 1\big) = \frac{1}{2}\ln 2 \overset{(**)}{=} \ln\sqrt{2}.$$

$(*)$ Tässä on käytetty logaritmien laskulakia $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.
$(**)$ Tässä taas laskulakia $b \cdot \ln a = \ln a^b$.

2. Laske

$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Syksyn monisteen viimeistä sivua kannattaa vilkaista.

Ratkaisu. Koska $D\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, niin

$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \Big/_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \arcsin x = \arcsin(\sqrt{3}/2) - \arcsin(1/2)$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

3. Derivoi

$$f(x) = \int_0^{\sin x} \cos t\,dt.$$

Ratkaisu.[1] Koska funktio $\cos x$ on jatkuva, on se integroituva millä tahansa suljetulla välillä (Lause 3.6.). Näin ollen on olemassa integraalifunktio $G(x) = \int_0^x \cos t\,dt$, jolle $G'(x) = \cos x$. Nyt

$$f(x) = \int_0^{\sin x} \cos t\,dt = G(\sin x) - G(0),$$

[1]Huomaa, että tällä ratkaisutavalla voit derivoida myös sellaisen integraalin, jota ei pysty laskemaan (kuten on tilanne esimerkiksi tehtävässä 4)!

josta derivoimalla (yhdistetyn funktion derivoinnin ketjusääntöä käyttäen)

$$Df(x) = D(G(\sin x) - G(0)) = G'(\sin x) \cdot \cos x - 0 = \cos(\sin x) \cdot \cos x.$$

4. Osoita, että $e^{x^2} \geq 1 + x^2$, kun $0 \leq x \leq 1$, ja tämän tuloksen avulla, että

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \geq \frac{4}{3}.$$

Ratkaisu. Merkitään $h(x) = e^{x^2} - (1 + x^2) = e^{x^2} - x^2 - 1$. Nyt $h'(x) = 2xe^{x^2} - 2x = 2x(e^{x^2} - 1) \geq 0$ kaikilla $x \in [0, 1]$, joten voimme päätellä, että funktio h on kasvava välillä $[0, 1]$. Koska lisäksi $h(0) = 0$, niin

$$h(x) = e^{x^2} - (1 + x^2) \geq 0 \Leftrightarrow e^{x^2} \geq 1 + x^2 \quad \text{kaikilla} \quad x \in [0, 1].$$

Siispä lauseen 4.11. nojalla

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \geq \int_0^1 1 + x^2 dx = \Big/_0^1 x + \frac{1}{3}x^3 = 1 + \frac{1}{3} \cdot 1^3 - (0 + \frac{1}{3} \cdot 0^3) = \frac{4}{3}.$$

5. Laske

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} dx$$

etsimällä luvut A, B ja C, joille

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx}{x^2+1} + \frac{C}{x^2+1}.$$

Ratkaisu. Nyt laventamalla yo. yhtälön oikean puolen termit samannimisiksi saadaan

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A(x^2+1) + Bx(x+1) + C(x+1)}{(x+1)(x^2+1)},$$

missä A, B ja C ovat (reaali)lukuja siten, että kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$A(x^2 + 1) + Bx(x + 1) + C(x + 1) = 1$$

$$\text{eli} \quad (A + B)x^2 + (B + C)x + (A + C) = 1.$$

Tämä toteutuu, jos ja vain jos

$$\begin{cases} A + B = 0 & \Leftrightarrow A = -B \\ B + C = 0 & \Leftrightarrow C = -B \\ A + C = 1 & \Leftrightarrow A = 1 - C, \end{cases}$$

mistä ratkaisemalla $A = C = \frac{1}{2}$ ja $B = -\frac{1}{2}$.

Nyt voimmekin helposti laskea vaaditun integraalin:

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\Big/_{0}^{1} \ln|x+1| - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\Big/_{0}^{1} \arctan(x)$$
$$= \frac{1}{2}\big(\ln|1+1| - \ln|0+1|\big) - \frac{1}{4}\Big/_{0}^{1} \ln|x^2+1| + \frac{1}{2}\big(\arctan(1) - \arctan(0)\big)$$
$$= \frac{1}{2}\big(\ln 2 - \ln 1\big) - \frac{1}{4}\big(\ln|1^2+1| - \ln|0^2+1|\big) + \frac{1}{2}\big(\frac{\pi}{4} - 0\big)$$
$$= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}\big(\ln 2 + \frac{\pi}{2}\big).$$

6. Laske

$$\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{dx}{1+\sin x}$$

sijoittamalla $t = \tan(\frac{1}{2}x)$ (eli x on tietty tangentin käänteisfunktion arvo). Monisteen sivun 26 alalaidassa näytetään, millaisen muodon dx, $\sin x$ ja $\cos x$ saavat tällaisessa sijoituksessa.

Ratkaisu. Monisteen sivun 26 mukaan sijoituksella $t = \tan(x/2)$ saadaan

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{ja} \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Tällöin uusiksi rajoiksi taas tulee

$$x = \pi/3: \quad t = \tan\big(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}\big) = \tan(\pi/6) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x = 2\pi/3: \quad t = \tan\big(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{3}\big) = \tan(\pi/3) = \sqrt{3}.$$

Näin ollen

$$\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{dx}{1+\sin x} = \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1+t^2}{t^2+2t+1}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}$$
$$= 2\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dt}{(t+1)^2} = -2\Big/_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (t+1)^{-1}$$
$$= -2\big(\frac{1}{\sqrt{3}+1} - \frac{1}{1/\sqrt{3}+1}\big) = -2\big(\frac{1}{\sqrt{3}+1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\big)$$
$$= \frac{2(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1}.$$