MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Harjoitus 10
6. 4. 2009 alkavalle viikolle
Ratkaisuehdotuksia (Tiina Kainulainen)

1. Millä luvuille $a > 0$ pätee, että sarja $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k$
(a) suppenee välillä $]-a, a[$
(b) suppenee tasaisesti välillä $[-a, a]$?

*Ratkaisu:*
*(a)* Havaitaan, että $2^k x^k = (2x)^k$, ja geometrinen sarja $\sum_{k=0}^{\infty}(2x)^k$ suppenee täsmälleen silloin, kun $|2x| < 1$ eli kun $|x| < \frac{1}{2}$. Siis sarja suppenee välillä $]-a, a[$ täsmälleen silloin, kun $0 < a \leq \frac{1}{2}$, koska näillä (ja vain näillä) $a$ pätee $]-a, a[\subset]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

*(b)* Olkoon $0 < a < \frac{1}{2}$. Edellisen nojalla k.o. sarja suppenee jokaisella $x \in [-a, a]$. Määritelmän mukaan funktiotermisen sarjan tasainen suppeneminen merkitsee sitä, että sen osasummien jono suppenee tasaisesti kohti summafunktiota tarkasteluvälillä. Tässä tapauksessa osaamme sattumoisin myös laskea sarjan summan ja osasummat geometrisen sarjan summakaavojen avulla. Merkitään $S_n : [-a, a] \to \mathbb{R},\ S_n(x) = \sum_0^{n-1}(2x)^k = \frac{1-(2x)^n}{1-2x}$ sekä $S : [-a, a] \to \mathbb{R},\ S(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(2x)^k = \frac{1}{1-2x}$, ja osoitetaan, että $S_n \to S$ tasaisesti. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska kaikilla $x \in [-a, a]$ pätee

$$|S_n(x) - S(x)| = \left|\frac{1-(2x)^n}{1-2x} - \frac{1}{1-2x}\right| = \left|\frac{(2x)^n}{1-2x}\right| \leq \frac{|2a|^n}{|1-2a|},$$

niin valitsemalla $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ niin suureksi, että $|2a|^n < \varepsilon \cdot |1-2a|$ saadaan $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$ kun $n > n_\varepsilon$. (Tämä on mahdollista, koska $|2a| < 1$.) Siis $S_n \to S$ tasaisesti joukossa $[-a, a]$.

Toisaalta, sarja ei suppene pisteessä $x = \frac{1}{2}$, koska tällöin $(2x)^k = 1$ kaikilla $k$. Näin ollen se ei voi supeta edes pisteittäin millään välillä $[-a, a]$, missä $a \geq \frac{1}{2}$. Siis sarja suppenee tasaisesti joukossa $[-a, a]$ täsmälleen silloin, kun $0 < a < \frac{1}{2}$.

*Huomautus*: Tämänkin tehtävän olisi voinut ratkaista (helpommin) vetoamalla Weierstrassin testiin, jota käytetään seuraavissa tehtävissä.

2. Millä luvuille $a > 0$ pätee, että sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k}$$

(a) suppenee välillä $]-a, a[$
(b) suppenee tasaisesti välillä $[-a, a]$?

*Ratkaisu:*
*(a)* Havaitaan, että sarjan termeille pätee $x^k/2^k = (x/2)^k$ ja geometrinen sarja $\sum_{k=0}^{\infty}(x/2)^k$ suppenee täsmälleen silloin, kun $|x/2| < 1$ eli kun $|x| < 2$. Kuten edellä, päätellään että tarkasteltava sarja suppenee välillä $]-a, a[$ täsmälleen silloin, kun $0 < a \leq 2$.

*(b)* Osoitetaan, että sarja suppenee tasaisesti välillä $[-a, a]$ täsmälleen silloin, kun $0 < a < 2$. Olkoon $0 < a < 2$. Nyt jokaisella $x \in [-a, a]$ pätee $|x^k/2^k| = |(x/2)^k| \leq (a/2)^k$, ja toisaalta $|a/2| < 1$. Siispä sarjalla $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/2^k$ on majoranttina suppeneva geometrinen sarja $\sum_{k=0}^{\infty}(a/2)^k$, joka ei riipu luvusta $x \in [-a, a]$, joten Weierstrassin testin (Lause 3.3., sivu 84) mukaan tarkasteltava sarja suppenee tasaisesti välillä $[-a, a]$. Toisaalta, sarja ei suppene pisteessä $x = 2$, koska tällöin $x^k/2^k = 1$ kaikilla $k$. Näin ollen se ei voi supeta millään välillä $[-a, a]$, missä $a \geq 2$.

3. Suppeneeko sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin^k x}{2^k}$$

tasaisesti koko reaalilukujen joukossa?

*Ratkaisu*: Kyllä suppenee. Koska $|\frac{\sin^k x}{2^k}| = |(\frac{\sin x}{2})^k| \leq (\frac{1}{2})^k$ riippumatta luvusta $x \in \mathbb{R}$, niin suppeneva geometrinen sarja $\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^k$ on (monisteen terminologian mukaan) tarkasteltavan sarjan ns. vakiomajoranttisarja. Weierstrassin testin mukaan tarkasteltava sarja suppenee tasaisesti joukossa $\mathbb{R}$.

4. Suppeneeko sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \sin^{k^k} x$$

tasaisesti välillä $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$?

*Ratkaisu*: Kyllä. Sovelletaan jälleen Weierstrassin testiä. Koska $|x^k \sin^{k^k} x| = |x|^k \underbrace{|\sin x|^{k^k}}_{\leq 1} \leq |x|^k \leq (1/2)^k$ jokaisella $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, niin tällä sarjalla on tarkasteluvälillä vakiomajoranttina suppeneva geometrinen sarja $\sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^k$. Siispä tarkasteltava sarja suppenee tasaisesti välillä $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

*Huomautus tehtäviin 5 ja 6*: Palautetaan mieleen merkintäsopimus $x^0 = 1$ myös, kun $x = 0$.

5. Määritellään

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{k} x^k$$

Laske $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ ja $f'''(0)$.

*Ratkaisu*: Funktio $f$ on määritelty potenssisarjana, jonka kehityskeskus on 0 ja kertoimille pätee $a_k = \sqrt{k}$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Tiedetään, että sarja suppenee ainakin pisteessä $x = 0$, ja nyt

$$f(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{k} \cdot 0^k = \sqrt{0} = 0.$$

Koska

$$\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} = \sqrt{\frac{k}{k+1}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{k}}} \to 1 \text{ kun } k \to \infty,$$

niin sivun 94 lauseen 1.8. perusteella sarjan suppenemissäde on $1 > 0$. Nyt sivun 97 lauseen 2.5. nojalla funktiolla $f$ on kaikkien kertalukujen derivaatat välillä $]-1, 1[$ ja erityisesti pisteessä 0. Lisäksi $n$:s derivaatta voidaan laskea derivoimalla termeittäin:

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdot \ldots \cdot (k-n+1) a_k x^{k-n}$$

Näin ollen

$$f^{(n)}(0) = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-n+1) a_n = n! a_n,$$

koska ensimmäistä lukuunottamatta sarjan kaikki termit ovat nyt nollia. Erityisesti

$f'(0) = 1! \cdot a_1 = \sqrt{1} = 1$

$f''(0) = 2! \cdot a_2 = 2\sqrt{2}$ ja
$f'''(0) = 3! \cdot a_3 = 6\sqrt{3}$.

6. Esitä funktio $f(x) = \frac{1}{1-x^3}$ potenssisarjana, joka suppenee välillä $]-1,1[$ ja määritä tämän avulla funktion 10., 11. ja 12. derivaatta kohdassa $x = 0$. Vihje: geometrinen sarja.

*Ratkaisu*: Tunnistetaan geometrisen sarjan summakaava

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}, \text{ kun } |q| < 1$$

ja sijoitetaan tähän $q = x^3$. Nyt

$$f(x) = \frac{1}{1-x^3} = \sum_{i=0}^{\infty} x^{3i}, \text{ kun } |x^3| < 1 \text{ eli kun } |x| < 1.$$

Sarjan termit ovat siis jonon $(x^k)_{k=0}^{\infty}$ ne jäsenet, joissa $k$ on jaollinen luvulla 3. Merkitään $a_k = 1$, kun $\frac{k}{3} \in \{0,1,2,3,\ldots\}$ ja $a_k = 0$, kun $\frac{k}{3} \notin \{0,1,2,3,\ldots\}$. Tällöin funktio $f$ voidaan esittää välillä $]-1,1[$ suppenevana potenssisarjana

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Taas sivun 97 lauseen 2.5. nojalla funktiolla $f$ on suppenemisvälillä kaikkien kertalukujen derivaatat, ja

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-n+1)a_k x^{k-n}$$

Näin ollen

$$f^{(n)}(0) = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-n+1)a_n = n!a_n,$$

koska ensimmäistä lukuunottamatta sarjan kaikki termit ovat nollia.Nyt voidaan laskea kysytyt derivaatat

$f^{(10)}(0) = 10! \cdot a_{10} = 10! \cdot 0 = 0$, koska $\frac{10}{3} \notin \{0,1,2,3,\ldots\}$
$f^{(11)}(0) = 11! \cdot a_{11} = 11! \cdot 0 = 0$, koska $\frac{11}{3} \notin \{0,1,2,3,\ldots\}$
$f^{(12)}(0) = 12! \cdot a_{12} = 12! \cdot 1 = 12!$, koska $\frac{12}{3} = 4 \in \{0,1,2,3,\ldots\}$.