MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Ohjaus 9
30. 3. 2009 alkavalle viikolle
Ratkaisuehdotuksia/AK (3 sivua)

Sovellusten kannalta tärkeitä sarjoja ovat potenssisarjat. Potenssisarjojen teoriassa tärkeä tulos on **Abelin lause** [Moniste, Lause 1.1, s. 91]:

Abelin lause. Tarkastellaan potenssisarjaa

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \, (x - x_0)^k, \tag{1}$$

missä *kertoimet* $a_0, a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$ ja *keskus* $x_0 \in \mathbb{R}$ ovat (x:stä riippumattomia) vakioita. Jos potenssisarja suppenee jollakin $x = x_1 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_0$, niin se suppenee itseisesti jokaisella sellaisella $x \in \mathbb{R}$, joka toteuttaa ehdon $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$. Toisaalta, jos potenssisarja hajaantuu jollakin $x = x_2 \in \mathbb{R}$, niin se hajaantuu jokaisella sellaisella $x \in \mathbb{R}$, joka toteuttaa ehdon $|x - x_0| > |x_2 - x_0|$.

1. Luennoilla on käsitelty sitä, mitä tiedetään sellaisen potenssisarjan suppenemisesta, jonka suppenemissäde R on positiivinen reaaliluku. Osoita samaan tapaan, että potenssisarja suppenee koko reaalilukujen joukossa, jos $R = \infty$.

Ratkaisu: Muistetaan, että jokaiseen potenssisarjaan (1) liittyy *suppenemissäde* R, joka määritellään asettamalla

$$R = \sup\{|x - x_0| : \text{potenssisarja (1) suppenee pisteessä } x\} \in [0, \infty].$$

Suppenemissäde on siis "mitta" sille, "kuinka kaukana" keskuksesta x_0 potenssisarja (1) suppenee.

Nyt $R = \infty$, joten on olemassa mielivaltaisen kaukana keskuksesta x_0 olevia pisteitä x, joilla potenssisarjamme suppenee. Tästä ei automaattisesti seuraa, että potenssisarja suppenisi *kaikilla* reaaliluvuilla; voisihan olla, että lähellä keskusta x_0 on pisteitä, joissa sarja ei suppene. Abelin lause kuitenkin takaa, ettei suppenemisvälillä voi olla "reikiä":

Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Tehtävämme on osoittaa, että potenssisarja (1) suppenee pisteessä x. Koska $R = \infty$, ei joukko

$$\{|x - x_0| : \text{potenssisarja (1) suppenee pisteessä } x\}$$

ole ylhäältä rajoitettu. On siis olemassa sellainen piste $x_1 \in \mathbb{R}$, joka on kauempana keskuksesta x_0 kuin piste x, eli $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$, ja jossa potenssisarjamme suppenee. Abelin lauseen nojalla potenssisarja (1) suppenee silloin (peräti itseisesti) myös pisteessä x.

2. Oletetaan, että potenssisarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ suppenee kohdassa x_1 ja hajaantuu kohdassa x_2, missä $|x_1 - x_0| = |x_2 - x_0|$. Mikä on sarjan suppenemissäde?

Ratkaisu: Koska potenssisarjamme suppenee pisteessä x_1, niin $R \geq |x_1 - x_0|$. Toisaalta, potenssisarja hajaantuu pisteessä x_2, joten Abelin lauseen nojalla se hajaantuu jokaisessa sellaisessa pisteessä $x \in \mathbb{R}$, jolle pätee $|x - x_0| > |x_2 - x_0|$. Siis $R \leq |x_2 - x_0|$. Pätee siis $R = |x_1 - x_0| = |x_2 - x_0|$.

3. Oletetaan, että potenssisarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ suppenemissäde on 1. Mikä on sarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{7^k} (x-x_0)^k$$

suppenemissäde?

Ratkaisu: Sarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ suppenemissäde $R = 1$, joten sarja suppenee kaikilla sellaisilla $x \in \mathbb{R}$, jotka toteuttavat ehdon $|x - x_0| < 1$ ja hajaantuvat kaikilla sellaisilla pisteillä x, jotka toteuttavat ehdon $|x - x_0| > 1$. Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Tutkimme sarjaa

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{7^k} (x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{x-x_0}{7}\right)^k .$$

Oletuksen nojalla sarja suppenee kaikilla sellaisilla x, joilla

$$\left|\frac{x-x_0}{7}\right| < 1, \text{ eli kun } |x-x_0| < 7.$$

Näin ollen $R \geq 7$. Toisaalta sarja hajaantuu kaikilla sellaisilla x, joilla

$$\left|\frac{x-x_0}{7}\right| > 1, \text{ eli kun } |x-x_0| > 7.$$

Näin ollen $R \leq 7$. Pätee siis, että $R = 7$.

Huomautus: Muistamme, että **geometrinen** sarja $\sum_{k=0}^{\infty}(x-x_0)^k$, $x_0 \in \mathbb{R}$, on erikoistapaus potenssisarjasta, sen kertoimet $a_k = 1$ jokaisella $k \in \mathbb{R}$. Geometrista sarjaa voisi kutsua potenssisarjojen "prototyypiksi". Tiedämme, että se suppenee silloin, kun $|x - x_0| < 1$ ja hajaantuu silloin, kun kun $|x - x_0| \geq 1$. Geometrisen sarjan suppenemissäde on siis $R = 1$. Jos valitsemme potenssisarjalle kertoimiksi $a_k = r^k$ jokaisella $k \in \mathbb{N}$, missä $r > 0$, niin saamme edelleen geometrisen sarjan $\sum_{k=0}^{\infty} r^k (x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(r(x-x_0))^k$. Tämä sarja suppenee silloin, kun $|r(x-x_0)| < 1$ eli kun $|x-x_0| < 1/r$ ja hajaantuu silloin, kun kun $|r(x-x_0)| \geq 1$ eli kun $|x - x_0| \geq 1/r$. Potenssisarjan suppenemissäde on siis $R = 1/r$. Tämä havainto yleistyy suoraan yleisiin potenssisarjoihin, kuten tehtävä 3 antaa ymmärtää: Jos potenssisarjan (1) suppenemissäde on R, niin sarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k (x-x_0)^k$ suppenemissäde on R/r.

4. Monisteessa on lause, joka karakterisoi ehdot $R \geq 1$, $R \leq 1$ ja $R = 1$. Yritä muotoilla edellisen tehtävän antaman vihjeen perusteella vastaava lause, joka karakterisoi ehdot $R \geq 7$, $R \leq 7$ ja $R = 7$.

Ratkaisu: Monisteen lause, joka karakterisoi ehdot $R \geq 1$, $R \leq 1$ ja $R = 1$ löytyy sivulta 93 (Lause 1.7). Edellisessä tehtävässä huomasimme, että potenssisarjan kertoimia muuttamalla sarjan suppenemissäde muuttuu. Uusilla kertoimilla $a_k/7^k$ suppenemissäde 7-kertaistui. Monisteen lauseen ja edellisen tehtävän huomautuksen nojalla, väitämme, että potenssisarjan (1) suppenemissäteelle R on voimassa:

1. Jos on olemassa sellainen $M < \infty$, että $|a_k| \leq M/7^k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, niin $R \geq 7$.
2. Jos on olemassa sellainen $m > 0$, että $|a_k| \geq m/7^k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, niin $R \leq 7$.
3. Jos on olemassa sellaiset $m > 0$ ja $M < \infty$, että $m/7^k \leq |a_k| \leq M/7^k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, niin $R = 7$.

Todistamme väitteemme: 1. Tutkimme potenssisarjan (1) suppenemissädettä tapauksessa, jossa kertoimet a_k toteuttavat ehdon $|a_k| \leq M/7^k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, missä $M < \infty$. Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Koska

$$|a_k(x - x_0)^k| = |a_k|\,|x - x_0|^k \leq \frac{M}{7^k}\,|x - x_0|^k = M\left|\frac{x - x_0}{7}\right|^k \text{ kaikilla } k \in \mathbb{N},$$

niin sarjalla $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k\,(x-x_0)^k|$ on majoranttina geometrinen sarja $\sum_{k=0}^{\infty} M\,\left|\frac{x-x_0}{7}\right|^k$. Tämä suppenee silloin, kun $\left|\frac{x-x_0}{7}\right| < 1$ eli kun $|x - x_0| < 7$. Majoranttiperiaatteen nojalla sarja $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k\,(x-x_0)^k|$ suppenee silloin, kun $|x-x_0| < 7$. Olemme osoittaneet, että sarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x - x_0)^k$ suppenee itseisesti, kun $|x - x_0| < 7$. Sarjamme suppenee siis ainakin silloin, kun $|x - x_0| < 7$. Sarjan suppenemissäteelle on näin voimassa $R \geq 7$.

2. Tutkimme potenssisarjan (1) suppenemissädettä tapauksessa, jossa kertoimet a_k toteuttavat ehdon $|a_k| \geq m/7^k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, missä $m > 0$. Olkoon $x \in \mathbb{R}$ ja $|x - x_0| = 7$. Koska

$$|a_k(x - x_0)^k| = |a_k|\,|x - x_0|^k \geq \frac{m}{7^k} \cdot 7^k = m \text{ kaikilla } k \in \mathbb{N},$$

niin pätee, että $a_k(x - x_0)^k \geq m > 0$ tai $a_k(x - x_0)^k \leq -m < 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Sarjamme siis hajaantuu (esimerkiksi sillä perusteella, ettei sarjan termien raja-arvo ole nolla). Olemme osoittaneet, että sarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x - x_0)^k$ hajaantuu, kun $|x - x_0| = 7$. Sarjan suppenemissäteelle on näin voimassa $R \leq 7$.

3. Yhdistämällä kohtien 1 ja 2 tulokset päätämme, että jos potenssisarjan kertoimet toteuttavat ehdon $m/7^k \leq |a_k| \leq M/7^k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, missä $m > 0$ ja $M < \infty$, niin $R = 7$.