MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Ohjaus 3
2.2.2009 alkavalle viikolle
Ratkaisuehdotuksia / AK (5 sivua)

1. Laske
$$\int_1^e \frac{x^4+x+1}{x^2}\,dx.$$

Ratkaisu: Ennen integrointia jaetaan osoittaja termeittäin:
$$\frac{x^4+x+1}{x^2} = \frac{x^4}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x} + x^{-2}.$$

Huomataan, että funktio $F\colon [1,e] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \ln x - x^{-1}$ on integroitavan funktion eräs integraalifunktio välillä $[1,e]$. Analyysin peruslauseen nojalla
$$\int_1^e \frac{x^4+x+1}{x^2}\,dx = \int_1^e \Big(x^2 + \frac{1}{x} + x^{-2}\Big)\,dx = \mathop{\Big/}_{1}^{e} F(x) = F(e) - F(1)$$
$$= \frac{1}{3}e^3 + \underbrace{\ln e}_{=1} - e^{-1} - \Big(\frac{1}{3} + \underbrace{\ln 1}_{=0} - 1^{-1}\Big) = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{e} + \frac{5}{3}$$

2. Osoita, että
$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \le e - 1.$$

Huom: ET pysty laskemaan ko. integraalia tarkasti. Tieto, että $x^2 \le x$ kaikilla $x \in [0,1]$ auttaa.

Ratkaisu: Ratkaisu perustuu monisteen Lauseeseen 4.2 (sivulla 9):

Lause 1. *Olkoot $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integroituvia funktioita. Oletetaan, että $f(x) \le g(x)$ jokaisella $x \in [a,b]$. Tällöin*
$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

Huomautus: Lauseesta 4.2 on olemassa hieman tarkempikin tulos, jos funktiot f ja g ovat *jatkuvia*; katso monisteen Lause 4.11 (sivulla 12). Pärjäämme tässä Lauseella 4.2.

Olkoon $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ funktio, jolle pätee $f(x) = e^{x^2}$ jokaisella $x \in [0,1]$. Koska $x^2 \le x$ kaikilla $x \in [0,1]$ ja eksponenttifunktio on kasvava, niin $f(x) = e^{x^2} \le e^x$ kaikilla $x \in [0,1]$. Valitsemme funktioksi g funktion $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ jolle $g(x) = e^x$

jokaisella $x \in [0,1]$. Funktiot f ja g ovat jatkuvia, joten ne ovat myös integroituvia. Lisäksi pätee

$$f(x) = e^{x^2} \leq e^x = g(x) \quad \text{jokaisella } x \in [0,1].$$

Lauseen 4.2 nojalla

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \leq \int_0^1 e^x\,dx \overset{*}{=} \Big/_0^1 e^x = e^1 - e^0 = e - 1.$$

Yhtäsuuruuden $*$ kohdalla käytettiin jälleen Analyysin peruslausetta.

3. Laske osamurtojen avulla

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+3)(x-5)}.$$

Ratkaisu: Etsitään murtolausekkeelle $1/(x+3)(x-5)$ osamurrot, toisin sanoen, etsitään sellaiset vakiot A ja B, että jokaisella $x \in [0,1]$ on voimassa yhtäsuuruus

$$\frac{1}{(x+3)(x-5)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-5}.$$

Kerrotaan ensin yhtälön molemmat puolet lausekkeella $(x+3)(x-5)$:

$$1 = A(x-5) + B(x+3) \quad \Longleftrightarrow \quad 1 = (A+B)x - 5A + 3B.$$

Jotta tämä yhtälö olisi voimassa *jokaisella* $x \in [0,1]$, on oltava

$$\begin{cases} A + B &= 0 \\ -5A + 3B &= 1. \end{cases}$$

Tästä ratkaisemalla saamme $A = -1/8$ ja $B = 1/8$. Siis pätee

$$\frac{1}{(x+3)(x-5)} = \frac{-1/8}{x+3} + \frac{1/8}{x-5} \quad \text{jokaisella } x \in [0,1].$$

Nyt pääsemme integroimaan:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx}{(x+3)(x-5)} &= \int_0^1 \frac{-1/8}{x+3} + \frac{1/8}{x-5}\,dx = \frac{1}{8}\int_0^1 \Big(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x+3}\Big)\,dx \\
&\overset{*}{=} \frac{1}{8} \Big/_0^1 \Big(\ln|x-5| - \ln|x+3|\Big) \\
&= \frac{1}{8}\Big(\ln 4 - \ln 4 - (\ln 5 - \ln 3)\Big) = \underline{\underline{\frac{1}{8}\Big(\ln 3 - \ln 5\Big)}}.
\end{aligned}$$

Kohdassa $*$ käytimme jälleen Analyysin peruslausetta.

4. Laske

$$\int_0^1 \frac{x^3}{(x+3)(x-5)}\,dx.$$

Vihje: jaa ensin osoittaja nimittäjällä.

Ratkaisu: Noudatetaan vihjettä ja suoritetaan jakolasku. Yleisesti, mikäli murtolausekkeessa osoittajan asteluku on suurempi kuin nimittäjän asteluku, jakaminen kannattaa tehdä ennen integrointia. Jaon voi tapauksesta riippuen tehdä joko (1) jakamalla osoittaja termeittäin (kuten tehtävässä 1 tehtiin), (2) suorittamalla jakaminen jakokulmassa (olisi tässä tapauksessa kätevintä) tai kuten seuraavassa, (3) muokkaamalla osoittajaa sopivasti. Tässä auttaa kun huomaa, että $(x+3)(x-5) = x^2 - 2x - 15$.

$$\begin{aligned}
\frac{x^3}{(x+3)(x-5)} &= \frac{x(x^2-2x-15)+2x^2+15x}{(x+3)(x-5)} \\
&= \frac{x(x^2-2x-15)+2(x^2-2x-15)+19x+30}{(x+3)(x-5)} \\
&= \frac{x(x+3)(x-5)}{(x+3)(x-5)} + \frac{2(x+3)(x-5)}{(x+3)(x-5)} + \frac{19x+30}{(x+3)(x-5)} \\
&= x+2+\frac{19x+30}{(x+3)(x-5)}.
\end{aligned}$$

Etsitään murtolausekkeelle $(19x+30)/(x+3)(x-5)$ osamurrot, toisin sanoen, etsitään sellaiset vakiot A ja B, että jokaisella $x \in [0,1]$ on voimassa yhtäsuuruus

$$\frac{19x+30}{(x+3)(x-5)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-5}.$$

Huomaa, että yhtälön oikealla puolella sopivien määräämättömien polynomien (tässä tapauksessa vakioiden A ja B) valinta riippuu *ainoastaan* nimittäjän tekijöistä – ei osoittajasta. Kerrotaan ensin yhtälön molemmat puolet lausekkeella $(x+3)(x-5)$:

$$19x+30 = A(x-5)+B(x+3) \quad \Longleftrightarrow$$

$$19x+30 = (A+B)x - 5A + 3B.$$

Jotta tämä yhtälö olisi voimassa *jokaisella* $x \in [0,1]$, on oltava

$$\begin{cases} A+B &= 19 \\ -5A+3B &= 30. \end{cases}$$

Tästä ratkaisemalla saamme $A = 27/8$ ja $B = 125/8$. Siis pätee

$$\frac{19x+30}{(x+3)(x-5)} = \frac{27/8}{x+3} + \frac{125/8}{x-5} \quad \text{jokaisella } x \in [0,1].$$

Nyt pääsemme integroimaan:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^3}{(x+3)(x-5)}\,dx &= \int_0^1 \Big(x+2+\frac{19x+30}{(x+3)(x-5)}\Big)\,dx \\
&= \int_0^1 \Big(x+2+\frac{27/8}{x+3}+\frac{125/8}{x-5}\Big)\,dx \\
&\overset{*}{=} \Big/_0^1 \Big(\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{27}{8}\ln|x+3|+\frac{125}{8}\ln|x-5|\Big) \\
&= \frac{1}{2}+2+\frac{27}{8}\ln 4+\frac{125}{8}\ln 4-\Big(0+0+\frac{27}{8}\ln 3+\frac{125}{8}\ln 5\Big) \\
&= \underline{\underline{\frac{5}{2}+19\ln 4-\frac{27}{8}\ln 3-\frac{125}{8}\ln 5.}}
\end{aligned}$$

Kohdassa $*$ oli jälleen käytössä Analyysin peruslause.

Lisähuomautus kiinnostuneille: Murtolausekkeen $(19x+30)/(x+3)(x-5) = (19x+30)/(x^2-2x-15)$ käsittelyssä voimme osamurtojen määräämisen asemesta toimia toisin käyttäen samantyyppistä ideaa, mitä käytettiin tehtävänratkaisun alussa polynomia x^3 jaettaessa. Ideana tässä on, että osoittajaa sopivasti muokkaamalla saamme osoittajaan nimittäjän derivaatan eli lausekkeen $2x-2$. Tämäntyyppinen lausekkeen muokkaaminen on usein hyödyllistä.

$$\begin{aligned}
\frac{19x+30}{x^2-2x-15} &= \frac{\frac{19}{2}(2x+\frac{60}{19})}{x^2-2x-15} = \frac{19}{2}\Big(\frac{2x\overbrace{-2+\frac{98}{19}}^{=\frac{60}{19}}}{x^2-2x-15}\Big) \\
&= \frac{19}{2}\Big(\frac{2x-2}{x^2-2x-15}+\frac{98/19}{x^2-2x-15}\Big) \\
&= \frac{19}{2}\frac{2x-2}{x^2-2x-15}+\frac{19}{2}\frac{98/19}{x^2-2x-15} \\
&= \frac{19}{2}\frac{2x-2}{x^2-2x-15}+49\frac{1}{(x+3)(x-5)}.
\end{aligned}$$

Nyt pääsemme integroimaan:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^3}{(x+3)(x-5)}\,dx &= \int_0^1 \left(x+2+\frac{19x+30}{(x+3)(x-5)}\right)dx \\
&= \int_0^1 \left(x+2+\frac{19}{2}\frac{2x-2}{x^2-2x-15}+49\frac{1}{(x+3)(x-5)}\right)dx \\
&= \Big/_{\!\!0}^{1} \left(\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{19}{2}\ln|x^2-2x-15|\right)+49\int_0^1 \frac{dx}{(x+3)(x-5)} \\
&= \frac{1}{2}+2+\frac{19}{2}\ln 16-(0+0+\frac{19}{2}\ln 15)+49\int_0^1 \frac{dx}{(x+3)(x-5)} \\
&= \frac{5}{2}+\frac{19}{2}(\ln 16-\ln 15)+49\int_0^1 \frac{dx}{(x+3)(x-5)}.
\end{aligned}$$

Tässä jäljelle jäänyt integraali laskettiin jo tehtävässä 3:

$$49\int_0^1 \frac{dx}{(x+3)(x-5)} = \frac{49}{8}(\ln 3-\ln 5).$$

Siis

$$\int_0^1 \frac{x^3}{(x+3)(x-5)}\,dx = \underline{\underline{\frac{5}{2}+\frac{19}{2}(\ln 16-\ln 15)+\frac{49}{8}(\ln 3-\ln 5).}}$$

Vastaus näyttää erilaiselta kuin minkä saimme edellisellä sivulla. Integraalin arvoksi saadut luvut ovat kuitenkin samat. Tämä huomataan, kun muistetaan logaritmin laskusääntöjä ja lähdetään rohkeasti muokkaamaan vastausta:

$$\begin{aligned}
&\frac{5}{2}+\frac{19}{2}(\ln 16-\ln 15)+\frac{49}{8}(\ln 3-\ln 5) = \frac{5}{2}+\frac{19}{2}(\ln 4^2-\ln(3\cdot 5))+\frac{49}{8}(\ln 3-\ln 5) \\
&\overset{(1)}{=} \frac{5}{2}+\frac{19}{2}(2\ln 4-\ln 3-\ln 5)+\frac{49}{8}(\ln 3-\ln 5) \\
&\overset{(2)}{=} \frac{5}{2}+19\ln 4-\frac{19}{2}\ln 3-\frac{19}{2}\ln 5+\frac{49}{8}\ln 3-\frac{49}{8}\ln 5 \\
&\overset{(3)}{=} \frac{5}{2}+19\ln 4-\frac{27}{8}\ln 3-\frac{125}{8}\ln 5.
\end{aligned}$$

Joitakin perusteluja:
(1) Käytettiin logaritmin laskusääntöjä $\ln x^r = r\ \ln x$ ja $\ln(x\cdot y) = \ln x + \ln y$.
(2) Kerrotaan sulut auki.
(3) Lasketaan $-\frac{19}{2}\ln 3 + \frac{49}{8}\ln 3 = (\frac{49}{8}-\frac{19}{2})\ln 3 = (\frac{49}{8}-\frac{76}{8})\ln 3 = -\frac{27}{8}\ln 3$ ja vastaavasti luvun $\ln 5$ sisältäville termeille.