MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Harjoitus 8
23. 3. 2009 alkavalle viikolle
Ratkaisuehdotuksia/AK (6 sivua)

Ohjauksiin osallistumisesta on luvassa lisäpisteitä: jos osallistuu 23.3. alkaen 4–5 ohjaukseen, niin saa 2 lisäpistettä ja osallistumalla 3 ohjaukseen saa yhden lisäpisteen.

1. Tarkastellaan funktioita $f_n :]-1, 2[\to \mathbb{R}$, jotka on määritelty ehdolla

$$f_n(x) = \frac{1}{n} x^2.$$

Suppeneeko jono (f_n) pisteittäin? Suppeneeko se tasaisesti?

Ratkaisu: Tarkastellaan ensin funktiojonon (f_n) pisteittäistä suppenemista. Olkoon $x \in]-1, 2[$. Väitämme, että

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{n} = 0.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin

$$|f_n(x) - 0| = \frac{x^2}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{x^2}{\varepsilon}.$$

Valitaan $n_\varepsilon \geq x^2/\varepsilon$. Kun $n > n_\varepsilon$, niin

$$|f_n(x) - 0| = \frac{x^2}{n} < \frac{x^2}{n_\varepsilon} \leq \varepsilon.$$

Funktiojono (f_n) suppenee siis pisteittäin kohti rajafunktiota $f = (x \mapsto 0)$.

Osoitetaan seuraavaksi, että suppeneminen on tasaista. Olkoon $x \in]-1, 2[$. Tällöin

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{n} x^2 - 0 \right| = \frac{x^2}{n} < \frac{4}{n}.$$

Etäisyydelle $|f_n(x) - f(x)|$ löydettiin siis muuttujasta x riippumaton yläraja. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $n_\varepsilon \geq 4/\varepsilon$. Kun $n > n_\varepsilon$, niin kaikilla $x \in]-1, 2[$ pätee

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{4}{n} < \frac{4}{n_\varepsilon} \leq \varepsilon.$$

Siis, $f_n \longrightarrow f$ tasaisesti.

2. Tarkastellaan funktioita $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jotka on määritelty ehdolla

$$f_n(x) = \frac{1}{n}x^2.$$

Suppeneeko jono (f_n) pisteittäin? Suppeneeko se tasaisesti?

Ratkaisu: Tarkastellaan taas ensin pisteittäistä suppenemista. Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{n} = 0.$$

[Tämän raja-arvoväitteen todistus menee kuten tehtävässä 1.] Tämä pätee jokaisella $x \in \mathbb{R}$ erikseen, joten funktiojono (f_n) suppenee pisteittäin kohti rajafunktiota $f = (x \mapsto 0)$.

Suppeneminen ei ole tasaista: Olkoon $\varepsilon = 1$. Tasainen suppeneminen edellyttäisi, että löytyisi sellainen indeksi $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että *jokaisella* $x \in \mathbb{R}$ pätisi

$$|f_n(x) - 0| = \frac{x^2}{n} < 1 \quad \text{aina, kun } n > n_\varepsilon.$$

Tässä

$$\frac{x^2}{n} < 1 \iff n > x^2.$$

Jokaista $n \in \mathbb{N}$ kohti voidaan kuitenkin aina valita sellainen $x \in \mathbb{R}$, että $x^2 > n$. Siten ei siis ole olemassa lukua $n \in \mathbb{N}$, jolla epäyhtälö $n > x^2$ pätisi kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Ei siis ole olemassa sellaista ideksiä $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että ehdosta $n > n_\varepsilon$ seuraisi, että etäisyys $|f_n(x) - f(x)| < 1$ jokaisella $x \in \mathbb{R}$.

3. Tarkastellaan funktioita $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, jotka on määritelty ehdoilla $f_n(x) = n - n^2x$ kun $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ ja $f_n(x) = 0$ muuten. Suppeneeko jono (f_n) pisteittäin? Suppeneeko se tasaisesti? Onko olemassa raja-arvoa

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

Ratkaisu: Tarkastellaan siis funktiojonoa

$$f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} n - n^2x, & 0 \leq x \leq 1/n \\ \\ 0, & 1/n < x \leq 1. \end{cases}$$

Tarkastellaan suppenemista pisteessä $x = 0$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Lukujono $(f_n(0))_{n=1}^{\infty}$ ei siis suppene, joten funktiojono ei suppene pisteittäin. Tällöin se ei suppene tasaisestikaan [Huomautus 3), Luentomoniste, sivu 77 tai

Ohjaukset 8 / Tehtävä 4].

Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Koska $f_n(x) = 0$ jokaisella $x \in]1/n, 1]$, niin

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^{1/n} (n - n^2 x)\,dx = \Big/_0^{1/n} \left(nx - \frac{n^2}{2} x^2 \right)$$

$$= n \cdot \frac{1}{n} - \frac{n^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

On siis olemassa raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Määrättyjen integraalien muodostaman lukujonon suppeneminen ei siis kerro mitään itse funktiojonon suppenemisesta. Tässä oli esimerkki tilanteesta, jossa integraalien muodostama lukujono suppenee mutta funktiojono (f_n) ei suppene edes pisteittäin.

Lisähuomautus: Tarkastellaan funktiojonoa (f_n),

$$f_n\colon]0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ n - n^2 x, & 0 < x \le 1/n \\ 0, & 1/n < x \le 1. \end{cases}$$

Funktioiden määrittelyä on siis muutettu ainoastaan kohdassa $x = 0$. Osoitetaan, että jono (f_n) suppenee pisteittäin kohti vakiofunktiota $f = (x \mapsto 0)$.

Olkoot $x \in]0, 1]$ ja $\varepsilon > 0$. Valitaan $n_\varepsilon \ge \frac{1}{x}$. Oletetaan, että $n > n_\varepsilon$. Tällöin

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{n_\varepsilon} \le x \le 1,$$

joten $f_n(x) = 0$. Siis $|f_n(x) - 0| = |f_n(x)| = 0 < \varepsilon$ kun $n > n_\varepsilon$. Tämä pätee jokaisella $x \in]0, 1]$ erikseen. Lisäksi $f_n(0) = 0 \to 0$, kun $n \to \infty$. Näin ollen $f_n \longrightarrow 0$ pisteittäin.

Olkoon $\varepsilon = 1$, $n \ge 2$ ja $x \in]0, 1/n^2[$. Tällöin

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = n - n^2 x \ge n - n^2 \frac{1}{n^2} = n - 1 \ge 2 - 1 = 1.$$

Tämä pätee kaikilla $n \ge 2$ ja aina kun $x \in]0, 1/n^2[$. Suppeneminen ei siis ole tasaista.

Edellä laskimme, että

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Toisaalta
$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0 \neq \frac{1}{2}.$$
Rajankäynnin ja integroinnin järjestystä ei siis yleisesti voi vaihtaa, jos funktiojonon suppeneminen ei ole tasaista.

4. Laske
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 (x^2 + \frac{1}{n}\sin(e^{\cos x}))\,dx.$$
Käytä tasaista suppenemista (tarkista se!)

Ratkaisu: Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ määritellään funktio $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ asettamalla $f_n(x) = x^2 + \dfrac{1}{n}\sin(e^{\cos x})$ kaikilla $x \in [0,1]$. Osoitetaan, että fnktiojono (f_n) suppenee tasaisesti kohti funktiota $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$.

Olkoon $x \in [0,1]$. Tiedetään, että $0 \leq |\sin y| \leq 1$ jokaisella $y \in \mathbb{R}$, joten
$$|f_n(x) - f(x)| = \left|x^2 + \frac{1}{n}\sin(e^{\cos x}) - x^2\right| = \frac{1}{n}|\sin(e^{\cos x})| \leq \frac{1}{n}.$$
Etäisyydelle $|f_n(x) - f(x)|$ löydettiin siis muuttujasta x riippumaton yläraja. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $n_\varepsilon \geq 1/\varepsilon$ ja oletetaan, että $n > n_\varepsilon$ ja $x \in [0,1]$. Tällöin
$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{n_\varepsilon} \leq \varepsilon.$$
Siis $f_n \longrightarrow f$ tasaisesti.

Funktiot f_n ovat jatkuvia ja funktiojono (f_n) suppenee tasaisesti kohti funktiota f, joten rajankäynnin ja integroinnin järjestyksen voi vaihtaa [Lause IV.2.2, Luentomoniste, sivu 79]:
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = \Big/_0^1 \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3}.$$

5. Laske
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 (1 + \frac{1}{n})^{nx}\,dx.$$
Käytä tasaista suppenenmista (tarkista se!) Muista myös luvun e määritelmä.

Ratkaisu: Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ määritellään funktio $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ asettamalla $f_n(x) = \big(1 + \dfrac{1}{n}\big)^{nx}$ kaikilla $x \in [0,1]$. Osoitetaan ensin, että funktiojono (f_n)

suppenee pisteittäin kohti funktiota $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = e^x$. Olkoon $x \in [0,1]$. Tiedetään, että

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{ja} \quad 1 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \text{ jokaisella } n \in \mathbb{N}.$$

[Analyysi I, Luentomoniste, Lause 4.10 s. 26 ja Huomautus s. 28].

Lisäksi potenssifunktio $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, g(y) = y^x$ on jatkuva (tässä siis eksponentti $x \in [0,1]$ on kiinteä), joten

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^x \\ &= \lim_{n\to\infty} g\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = g(e) = e^x.\end{aligned}$$

Tämä pätee jokaisella $x \in [0,1]$. Funktiojono (f_n) suppenee siis pisteittäin kohti rajafunktiota $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = e^x$. Osoitetaan, että suppeneminen on tasaista.

Potenssifunktio g on derivoituva ja $g'(y) = xy^{x-1}$. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Väliarvolauseen nojalla on olemassa piste $\xi \in \left]\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, e\right[$, jolla

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|g\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) - g(e)\right| \overset{\text{VAL}}{=} |g'(\xi)| \left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e\right|.$$

Luku $\xi > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 1$ ja $x \in [0,1]$, joten

$$|g'(\xi)| = x\xi^{x-1} \leq 1 \cdot \xi^{1-1} = \xi^0 = 1.$$

Siis

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e\right| = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Etäisyydelle $|f_n(x) - f(x)|$ löydettiin siis muuttujasta x riippumaton yläraja. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

on olemassa indeksi $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, jolla pätee

$$e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \varepsilon \quad \text{aina kun } n \geq n_\varepsilon.$$

Kun $n \geq n_\varepsilon$, pätee siis jokaisella $x \in [0,1]$, että

$$|f_n(x) - f(x)| \leq e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \varepsilon.$$

Siis $f_n \to f$ tasaisesti välillä $[0,1]$.

Funktiot f_n ovat jatkuvia ja funktiojono (f_n) suppenee tasaisesti kohti funktiota f, joten rajankäynnin ja integroinnin järjestyksen voi vaihtaa [Lause IV.2.2, Luentomoniste, sivu 79]:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 e^x dx = \Big/_{\!0}^{1} e^x = e - e^0 = e - 1.$$

6. Oletetaan, että $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja määritellään funktiot $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ehdolla $f_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$.
(a) Oletetaan, että f on jatkuva. Osoita, että jono (f_n) suppenee pisteittäin.
(b) Oletetaan, että f on tasaisesti jatkuva. Osoita, että jono (f_n) suppenee tasaisesti.

Ratkaisu: a) Osoitetaan, että $f_n \longrightarrow f$ pisteittäin. Olkoot $x \in \mathbb{R}$ ja $\varepsilon > 0$. Koska funktio f on jatkuva pisteessä x, niin on olemassa sellainen luku $\delta_x > 0$, että

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{aina, kun } 0 < |t - x| < \delta_x.$$

Valitaan luku $N \in \mathbb{N}$ niin, että

$$\frac{1}{N} \le \delta_x.$$

Kun $n > N$, niin pätee

$$0 < \left| \left(x + \frac{1}{n} \right) - x \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} \le \delta_x.$$

Näin $|f(x + 1/n) - f(x)| < \varepsilon$ aina, kun $n > N$. Siis

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x + 1/n) = f(x).$$

Tämä pätee jokaisella $x \in \mathbb{R}$ erikseen. Siis $f_n \longrightarrow f$ pisteittäin.

b) Edellisen kohdan nojalla $f_n \longrightarrow f$ pisteittäin. Osoitetaan, että suppeneminen on tasaista. Olkoon $\varepsilon > 0$. Funktio f on tasaisesti jatkuva $\mathbb{R}$:ssä, joten on olemassa sellainen luku $\delta_\varepsilon > 0$, että

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{aina, kun } x, y \in \mathbb{R} \text{ ja } |x - y| < \delta_\varepsilon.$$

Valitaan indeksi $n_\varepsilon \ge 1/\delta_\varepsilon$. Oletetaan, että $n > n_\varepsilon$ ja $x \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\left| x - \left(x + \frac{1}{n} \right) \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_\varepsilon} \le \delta_\varepsilon,$$

joten $|f(x) - f(x + 1/n)| < \varepsilon$. Siis

$$|f_n(x) - f(x)| = |f(x + 1/n) - f(x)| < \varepsilon.$$

Tämä pätee jokaisella $x \in \mathbb{R}$ kunhan $n > n_\varepsilon$. Siis $f_n \longrightarrow f$ tasaisesti $\mathbb{R}$:ssä.