MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Harjoitus 1
19.1.2009 alkavalle viikolle
Ratkaisuehdotuksia/AK (4 sivua)

Tehtävien 1 ja 2 ratkaisut perustuvat **Analyysin peruslauseeseen**, joka on ollut esillä luennoilla ja löytyy monisteesta sivulta 18:

Analyysin peruslause. *Olkoon* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *jatkuva funktio ja olkoon* F *jokin funktion* f *integraalifunktio välillä* $[a,b]$*. Tällöin*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big/_{\!a}^{\,b} F(x) = F(b) - F(a).$$

Analyysin peruslause todistetaan myöhemmin kurssilla.

1. Laske

$$\int_1^3 xe^{x^2}\,dx.$$

Ratkaisu: Yhdistetyn funktion derivointisäännön eli ketjusäännön nojalla

$$De^{x^2} = 2xe^{x^2} \quad \text{jokaisella } x \in [1,3].$$

Funktio $F\colon [1,3] \to \mathbb{R}, F(x) = e^{x^2}$ on siis funktion $f\colon [1,3] \to \mathbb{R}, f(x) = 2xe^{x^2}$ integraalifunktio välillä $[1,3]$. Koska

$$\int_1^3 xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^3 2xe^{x^2}\,dx,$$

niin Analyysin peruslauseen nojalla

$$\int_1^3 xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\Big/_{\!1}^{\,3} e^{x^2} = \frac{1}{2}(e^{3^2} - e^{1^2}) = \frac{1}{2}(e^9 - e).$$

2. Laske

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Ratkaisu: Syksyn monisteen sivulta 85 löytyy *areahyperbolisen sinin* derivointikaava:

$$D\,\mathrm{ar}\sinh x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{jokaisella } x \in [0,2].$$

Funktio $F\colon [0,2] \to \mathbb{R}, F(x) = \operatorname{ar\,sinh} x$ on siis funktion $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ integraalifunktio välillä $[0,2]$. Analyysin peruslauseen nojalla

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} &= \Big/_{0}^{2} \operatorname{ar\,sinh} x = \operatorname{ar\,sinh} 2 - \operatorname{ar\,sinh} 0 \\ &= \ln(2+\sqrt{2^2+1}) - \ln(0+\sqrt{0^2+1}) = \ln(2+\sqrt{5}) - \ln 1 \\ &= \ln(2+\sqrt{5}).\end{aligned}$$

Huomautus: Areahyperboliselle sinille $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = \operatorname{ar\,sinh} x$ on syksyn monisteessa johdettu kaava

$$F(x) = \operatorname{ar\,sinh} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1}).$$

3. Laske

$$\int_0^1 xe^x\,dx.$$

Ratkaisu: Käytetään vihjettä ja sovelletaan osittaisintegrointia (moniste s. 23):

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \Big/_{a}^{b} f(x)g(x) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Tässä kannattaa valita $f'(x) = e^x$ ja $g(x) = x$, jolloin $f(x) = e^x$ ja $g'(x) = 1$. Saadaan

$$\int_0^1 \overset{g}{x}\,\overset{f'}{e^x}\,dx = \Big/_{0}^{1} xe^x - \int_0^1 1\cdot e^x\,dx \overset{*}{=} \Big/_{0}^{1} xe^x - \Big/_{0}^{1} e^x = (1\cdot e^1 - 0\cdot e^0) - (e^1 - e^0) = e - (e-1) = 1.$$

Kohdassa $*$ on integraalin laskemiseen käytetty Analyysin peruslausetta.

4. Laske sijoituksella $x^2 = t$

$$\int_1^3 xe^{x^2}\,dx$$

Ratkaisu: Merkitään $t = x^2$, jolloin $dt = 2xdx$.
Uudet rajat:

$$x = 1 \Longrightarrow t = 1^2 = 1.$$
$$x = 3 \Longrightarrow t = 3^2 = 9.$$

Koska

$$\int_1^3 xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^3 e^{x^2}\,\underbrace{2xdx}_{=dt},$$

niin saamme sijoituksella $x^2 = t$

$$\int_1^3 xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^9 e^t\,dt \overset{*}{=} \frac{1}{2}\Big/_1^9 e^t = \frac{1}{2}(e^9 - e).$$

Kohdassa $*$ käytettiin taas Analyysin peruslausetta. Huomaa, että määrätyn integraalin arvoksi saatiin tietenkin sama kuin tehtävässä 1.

5. Tarkastellaan välin $[0,1]$ jakoja $D_1 = \{0, 1/3, 1\}$ ja $D_2 = \{0, 2/3, 1\}$. Anna Esimerkki näiden yhteisestä tihennyksestä.

Ratkaisu: Muistetaan, että jako D on jaon D' *tihennys* (eli alijako), jos $D' \subset D$. Tihennyksellä siis tarkoitetaan, että jakoon lisätään jakopisteitä tai jako pysyy ennallaan.

Siis esimerkiksi jako $D = D_1 \cup D_2 = \{0, 1/3, 2/3, 1\}$ on jakojen yhteinen tihennys sillä $D_1 \subset D$, joten se on jaon D_1 tihennys, ja $D_2 \subset D$, joten se on jaon D_2 tihennys. Jako D on itseasiassa annettujen jakojen suppein yhteinen tihennys.

Toisaalta, jako D on annettujen jakojen yhteinen tihennys, jos ja vain jos se sisältää sekä jaon D_1 jakopisteet että jaon D_2 jakopisteet; esimerkiksi yhteisestä tihennyksestä käy siis myös esimerkiksi jako

$$\{0, 1/5, 1/3, 2/3, 1\}.$$

6. Tarkastellaan funktiota $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, jolle pätee $f(x) = 0$, kun $x \neq 1$ ja $f(1) = 7$. Anna esimerkki välin $[0,2]$ jaosta D, jolla pätee $S_D - s_D < 2^{-100}$.

Ratkaisu: Havaitaan, että $\inf\{f(x) : x \in \Delta_k\} = 0$ jokaisella jakovälillä Δ_k olipa kyseessä mikä hyvänsä välin $[0,2]$ jako. Tämän takia alasumma

$$s_D = \sum_{k=1}^{n} \inf\{f(x) : x \in \Delta_k\} \cdot l(\Delta_k) = 0$$

jokaisella välin $[0,2]$ jaolla D. Toisaalta, myös $\sup\{f(x) : x \in \Delta_k\} = 0$ jokaisella jakovälillä Δ_k, joka ei sisällä pistettä 1. Voidaan siis todeta, että ylä- ja alasummat eroavat toisistaan ainoastaan pisteen 1 sisältävän jakovälin osalta.

Valitaan kolme jakoväliä: olkoon $0 < \delta < 1$ (jolloin $0 < 1 - \delta < 1 < 1 + \delta < 2$) ja asetetaan

$$D = \{0, 1 - \delta, 1 + \delta, 2\}.$$

Jakoväleinä ovat silloin

$$\Delta_1 = [0, 1 - \delta],\ \Delta_2 = [1 - \delta, 1 + \delta] \text{ ja } \Delta_3 = [1 + \delta, 2].$$

Jakoon D liittyvän yläsumman arvoksi saadaan

$$S_D = 0 \cdot l(\Delta_1) + \underbrace{\sup\{f(x) : x \in \Delta_2\}}_{=7} \cdot l(\Delta_2) + 0 \cdot l(\Delta_3) = 7\,l(\Delta_2) = 7 \cdot 2\delta = 14\delta.$$

Koska $s_D = 0$, niin

$$S_D - s_D = 14\delta.$$

Tässä $14\delta < 2^{-100} \iff \delta < \frac{2^{-100}}{14}$. Valitaan siis (esimerkiksi) $\delta = 2^{-104} = \frac{2^{-100}}{16}$. Tällöin

$$S_D - s_D = 14 \cdot \delta = 14 \cdot 2^{-104} = \frac{14}{2^4}\,2^{-100} = \frac{14}{16}\,2^{-100} < 2^{-100}.$$

Esimerkiksi halutunlaisesta jaosta kelpaa siis esimerkiksi jako

$$D = \{0, 1 - 2^{-104}, 1 + 2^{-104}, 2\}.$$