MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Ohjaus 6 / Ratkaisuehdotuksia (SL)
9.3.2009 alkavalle viikolle

1. Oletetaan, että (a_n) ja (b_n) ovat lukujonoja ja, että $a_n \to a$ ja $b_n \to b$ kun $n \to \infty$. Palauta mieleesi, mistä tiedetään, että $ca_n + db_n \to ca + db$ kun $n \to \infty$. (Tässä c ja d ovat reaalilukuja.)

   Ratkaisu: Olkoon $\epsilon > 0$. Huomataan, että

   $$\begin{aligned} |ca_n + db_n - (ca + db)| &= |ca_n - ca + db_n - db| \leq |ca_n - ca| + |db_n - db| \\ &= |c||a_n - a| + |d||b_n - b| \leq M(|a_n - a| + |b_n - b|), \end{aligned}$$

   missä $M = \max\{|c|, |d|, 1\}$.

   Nyt on olemassa $n_1 \in \mathbb{N}$ siten, että $|a_n - a| < \epsilon/2M$, kun $n > n_1$, ja on olemassa $n_2 \in \mathbb{N}$ siten, että $|b_n - b| < \epsilon/2M$, kun $n > n_2$.

   Olkoon $n_\epsilon = \max\{n_1, n_2\}$. Nyt

   $$|ca_n + db_n - (ca + db)| \leq M(|a_n - a| + |b_n - b|) < M\left(\frac{\epsilon}{2M} + \frac{\epsilon}{2M}\right) = \epsilon,$$

   kun $n > n_\epsilon$.

2. Oletetaan, että sarjat $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ suppenevat. Osoita edellisen tehtävän avulla tarkasti, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty}(cx_k + dy_k)$ suppenee, ja että

   $$\sum_{k=1}^{\infty}(cx_k + dy_k) = c\sum_{k=1}^{\infty} x_k + d\sum_{k=1}^{\infty} y_k.$$

   (Tässä c ja d ovat reaalilukuja.) Vihje: mieti osasummien jonoja!

   Ratkaisu: Merkitään $X = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ja $Y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k$.

   Olkoon osasummat $S_n = \sum_{k=1}^{n}(cx_k + dy_k)$, $S'_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ ja $S''_n = \sum_{k=1}^{n} y_k$.

   Tehtävänannosta tiedetään, että $S'_n \to X$ ja $S''_n \to Y$, kun $n \to \infty$. Sen lisäksi

   $$S_n = \sum_{k=1}^{n}(cx_k + dy_k) = c\sum_{k=1}^{n} x_k + d\sum_{k=1}^{n} y_k = cS'_n + dS''_n,$$

   kun $n \to \infty$.

   Edellisen tehtävän perusteella, saadaan $S_n \to cX + dY$, kun $n \to \infty$.

   Eli, sarja $\sum_{k=1}^{\infty}(cx_k + dy_k)$ suppenee.

3. Suppeneeko

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^4+1}?$$

Ratkaisu: Sarja suppenee. Arvioidaan ensin sarjan termejä:

$$0 < \frac{k^2+1}{k^4+1} < \frac{k^2+1}{k^4-1} = \frac{k^2+1}{(k^2+1)(k^2-1)} = \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{(k+1)(k-1)} < \frac{1}{k(k-1)},$$

kun $k = 2, 3, \ldots$.

Esimerkissä III.1.4. 3) on todettu että sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ suppenee ja että $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$. Nyt

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+1}{k^4+1} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{k^2+1}{k^4+1} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2$$

Koska kyseessä on positiiviterminen sarja, niin sen osasummat muodostavat nousevan jonon, ja koska nyt on osoitettu että jonolla (S_n) on yläraja, niin se suppenee.

4. Määritä ne x, joilla

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{kx}$$

suppenee. Vihje: Muistele koulusta geometrista sarjaa.

Ratkaisu: Tarkastellaan ensin tapausta $x = 0$, eli määrätään suppeneeko $\sum_{k=1}^{\infty} e^{k \cdot 0}$. Nyt osasumma

$$S'_n = \sum_{k=1}^{n} e^0 = \sum_{k=1}^{n} 1 = n \to \infty, \text{ kun } n \to \infty,$$

eli sarja hajaantuu.

Tarkastellaan seuraavaksi tapausta $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nyt osasumma

$$S''_n = \sum_{k=1}^{n} e^{kx} = \sum_{k=1}^{n} (e^x)^k = e^x \sum_{k=0}^{n-1} (e^x)^k \overset{(1)}{=} e^x \frac{1-(e^x)^{n-1}}{1-e^x} = \frac{e^x - e^{nx}}{1-e^x}$$

Koska e^x ja $1-e^x$ ovat tässä tapauksessa vakioita, niin sarjan (S''_n) suppenee vain kun (e^{nx}) suppenee. Sarja (e^{nx}) suppenee silloin kun $|e^x| < 1$, ja

$$|e^x| < 1 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow \ln e^x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 0$$

Eli, sarja $\sum_{k=1}^{\infty} e^{kx}$ suppenee vain kun $x < 0$.

(1) Tässä käytettiin geometrisen sarjan summaa

$$\sum_{k=0}^{n} aq^k = \frac{a(1-q^n)}{1-q}, \text{ kun } q \neq 1$$