MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Harjoitus 7 / Ratkaisuehdotuksia (SL/LO)
16.3.2009 alkavalle viikolle

Suppenevatko vai hajaantuvatko seuraavat sarjat?

1. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^k)}{k^2}.$$

Ratkaisu:

Tiedetään, että $-1 \leq \sin x \leq 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joten $0 \leq |\sin(k^k)| \leq 1$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Näin ollen

$$0 \leq \left| \frac{\sin(k^k)}{k^2} \right| = \frac{|\sin(k^k)|}{k^2} \leq \frac{1}{k^2} \quad \text{kaikilla} \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Majorantti $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ suppenee (ks. monisteen esimerkki III.2.9 tai harjoituksen 6 tehtävän 5 ratkaisu), joten majoranttiperiaatteen mukaan $\sum_{k=1}^{\infty} |\frac{\sin(k^k)}{k^2}|$ suppenee. Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^k)}{k^2}$ suppenee siis itseisesti, joten lauseen III.1.13 nojalla se suppenee.

2. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^5 + 6k + 1}{k^6 + 5k + 1}.$$

Ratkaisu:

Havaitaan, että sarjan termit ovat positiivisia kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Myös harmoninen sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ on positiiviterminen ja lisäksi

$$\begin{aligned} \frac{k^5 + 6k + 1}{k^6 + 5k + 1} : \frac{1}{k} &= \frac{k^6 + 6k^2 + k}{k^6 + 5k + 1} = \frac{k^6(1 + \frac{6}{k^4} + \frac{1}{k^5})}{k^6(1 + \frac{5}{k^5} + \frac{1}{k^6})} \\ &= \frac{1 + \frac{6}{k^4} + \frac{1}{k^5}}{1 + \frac{5}{k^5} + \frac{1}{k^6}} \xrightarrow[k \to \infty]{} 1 \in \,]0, \infty[\,. \end{aligned}$$

Tiedetään, että harmoninen sarja hajaantuu (ks. monisteen esimerkki III.1.4 ja esimerkki 1 s. 63), joten vertailutestin mukaan myös sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^5+6k+1}{k^6+5k+1}$ hajaantuu.

3. $$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{k}\Big)^k.$$

Ratkaisu:

Havaitaan, että sarjan termit ovat positiivisia kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Lisäksi

$$\sqrt[k]{\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{k}\Big)^k} = \frac{1}{2}+\frac{1}{k} \le \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{k} \le \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad k \ge 4\,,$$

joten juuritestin mukaan sarja $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2}+\frac{1}{k})^k$ suppenee.

4. $$\sum_{k=27}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\ln(\ln(\ln k))}.$$

Ratkaisu: Merkitään

$$a_k = \frac{1}{\ln(\ln(\ln k))} \quad \text{kaikilla} \quad k \ge 27.$$

Funktio $x \mapsto \ln x$ on aidosti kasvava ja $\ln(\ln(\ln 27)) \approx 0{,}18 > 0$, joten $0 < \ln(\ln(\ln k)) < \ln(\ln(\ln(k+1)))$ kaikilla $k \ge 27$ (*). Siten

$$\frac{1}{\ln(\ln(\ln k))} > \frac{1}{\ln(\ln(\ln(k+1)))} > 0 \quad \text{kaikilla} \quad k \ge 27$$

eli $a_{27} > a_{28} > a_{29} > \ldots > 0$.

Tiedetään, että $\ln k$ kasvaa rajatta, kun k kasvaa rajatta. Siten myös $\ln(\ln(\ln k)) \to \infty$, kun $k \to \infty$, ja

$$a_k = \frac{1}{\ln(\ln(\ln k))} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\,.$$

Näin ollen sarja

$$\sum_{k=27}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k = a_{27} - a_{28} + a_{29} - a_{30} + \ldots$$

suppenee Leibnizin lauseen nojalla. Tällöin myös sarja

$$\sum_{k=27}^{\infty}(-1)^k a_k = \sum_{k=27}^{\infty}(-1)\cdot(-1)^{k-1}a_k$$

suppenee lauseen III.1.9 nojalla.

(*) Lisäkommentti:

$\ln(\ln(\ln k))$ voidaan myös arvioida ilman likiarvoa:

$$\begin{aligned}
&\ln 27 = \ln 3^3 = 3\ln 3 > 3\ln e = 3 > e \\
&\Rightarrow \ln(\ln k) > \ln(\ln 27) > \ln e = 1 \\
&\Rightarrow \ln(\ln(\ln k)) > \ln 1 = 0.
\end{aligned}$$

5. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}.$$

Ratkaisu: Havaitaan, että sarjan termit ovat positiivisia kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Sen lisäksi

$$\begin{aligned}
\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} : \frac{k!}{k^k} &= \frac{(k+1)! \cdot k^k}{k! \cdot (k+1)^{k+1}} = \frac{k^k}{(k+1)^k} = \Big(\frac{k}{k+1}\Big)^k \\
&= \left(\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\right)^k = \frac{1}{(1+\frac{1}{k})^k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{e} < \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

On siis olemassa sellainen $k_0 \in \mathbb{N}$, että

$$\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} : \frac{k!}{k^k} \le \frac{1}{2} \quad \text{kaikilla} \quad k \ge k_0\,,$$

joten suhdetestin mukaan sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$ suppenee.

6. $$\sum_{k=2}^{\infty} \prod_{i=2}^{k} (1-\frac{1}{i})^i,$$

missä $\prod_{i=2}^{k}(1-\frac{1}{i})^i$ on lukujen $(1-\frac{1}{2})^2, \dots, (1-\frac{1}{k})^k$ tulo.

Ratkaisu:

Havaitaan, että sarjan termit ovat positiivisia kaikilla $k \ge 2$. Lisäksi

$$\begin{aligned}
\frac{\prod_{i=2}^{k+1}(1-\frac{1}{i})^i}{\prod_{i=2}^{k}(1-\frac{1}{i})^i} &= \frac{(1-\frac{1}{2})^2 \cdots (1-\frac{1}{k})^k (1-\frac{1}{k+1})^{k+1}}{(1-\frac{1}{2})^2 \cdots (1-\frac{1}{k})^k} \\
&= \Big(1-\frac{1}{k+1}\Big)^{k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{e} < \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Raja-arvo tiedetään syksyn kurssin perusteella (ks. Analyysi I, huomautus 9.13). Sen voi myös laskea uudelleen seuraavasti:

$$\Big(1-\frac{1}{k+1}\Big)^{k+1} = \Big(\frac{k}{k+1}\Big)^{k+1} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\right)^{k+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{k}} \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{k})^k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1 \cdot \frac{1}{e}\,.$$

On siis olemassa sellainen $k_0 \in \mathbb{N}$, että

$$\frac{\prod_{i=2}^{k+1}(1-\frac{1}{i})^i}{\prod_{i=2}^{k}(1-\frac{1}{i})^i} \le \frac{1}{2} \quad \text{kaikilla} \quad k \ge k_0\,,$$

joten suhdetestin mukaan sarja $\sum_{k=2}^{\infty} \prod_{i=2}^{k}(1-\frac{1}{i})^i$ suppenee.