MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Harjoitus 9 / Ratkaisuehdotuksia (RT)
1.-3.4.2009

1. Anna esimerkki potenssisarjasta $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-13)^k$ jonka suppenemissäde on $5$. Vihje: tutkaile geometrisia sarjoja.

   *Ratkaisu.*
   Olkoon $0 < R < \infty$. Määritetään sarjan $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{R^k}(x-13)^k$ suppenemissäde. Sarja $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{R^k}(x-13)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x-13}{R}\right)^k$ suppenee, jos ja vain jos $\left|\frac{x-13}{R}\right| < 1$ (ks. s. 58). Siis sarja suppenee täsmälleen silloin, kun $|x-13| < R$. Sarjan suppenemissäde on siten

   $$\sup\{|x-13| : x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{R^k}(x-13)^k \text{ suppenee}\} = \sup\{|x-13| : x \in \mathbb{R}, |x-13| < R\}$$
   $$= R.$$

   Näin ollen $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{5^k}(x-13)^k$ on esimerkki sarjasta, jonka suppenemissäde on $5$.

2. Millä $x$ sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}$ suppenee? Vihje: tutki sivun 91 esimerkkiä 1.3.

   *Ratkaisu.* Kun $x = 1$, niin sarja suppenee, koska siinä pisteessä se on alternoiva harmoninen sarja (vakiolla kertominen ei vaikuta suppenemiseen) $-1 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ (ks. Leibnizin lause III.2.11.). Abelin lauseen (Lause V.1.1.) a)-kohdan nojalla sarja suppenee, kun $|x| < 1$.

   Kun $x = -1$, niin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{k} = -1 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ hajaantuu (vakiolla kerrottuna) harmonisena sarjana ( $(-1)^n = -1$, kun $n$ on pariton kokonaisluku). Abelin lauseen b)-kohdan nojalla sarja hajaantuu, kun $|x| > 1$.

   Siispä sarjamme suppenee täsmälleen silloin, kun $-1 < x \leq 1$.

3. Millä $x$ sarja $\sum_{k=0}^{\infty} k^5 x^k$ suppenee? Vihje: sivun 94 lause 1.8; tarkastele suppenemisvälin päätepisteitä erikseen.

   *Ratkaisu.* Koska $\lim_{k\to\infty} = \frac{k^5}{(k+1)^5} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(1+1/k)^5} = 1$, niin lauseen V.1.8. a)-kohdan nojalla sarjan suppenemissäde on 1. Edelleen lauseen V.1.4. c)-kohdan nojalla sarja suppenee, kun $|x| < 1$ ja hajaantuu, kun $|x| > 1$.
   Kun $x = 1$, niin sarja on muotoa $\sum_{k=0}^{\infty} k^5$ ja kun $x = -1$, niin sarja saa muodon $\sum_{k=0}^{\infty} k^5(-1)^k$. Molemmissa tapauksissa sarja hajaantuu mm. siksi, että sarjan termit eivät suppene kohti nollaa (Huomautus 1.6., s.59).

   Tehtävän sarja suppenee siis täsmälleen silloin, kun $-1 < x < 1$.

4. Määritä sarjojen $\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{k+1}{k})^{k^2}x^k$ ja $\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{k}{k+1})^{k^2}x^k$ suppenemissäteet ja suppenemisvälit. Vihje: sivun 94 lause 1.8.

*Ratkaisu.*
i) Koska

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|((k+1)/k)^{k^2}|}}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{((k+1)/k)^{k^2}}}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{(1+1/k)^k}=1/e,$$

niin sarjan $\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{k+1}{k})^{k^2}x^k$ suppenemissäde on tällöin (Lause V.1.8., a)-kohta) $1/e$. Sarjan kehityskeskus on $0$, joten sen suppenemisväli on

$$]-1/e,1/e[.$$

ii) Koska

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|(k/(k+1))^{k^2}|}}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{(k/(k+1))^k}=\lim_{k\to\infty}((k+1)/k)^k=\lim_{k\to\infty}((1+1/k)^k=e,$$

niin sarjan $\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{k}{k+1})^{k^2}x^k$ suppenemissäde on $e$ (jälleen Lauseen V.1.8. a)-kohta). Tämänkin sarjan kehityskeskus on $0$, joten sen suppenemisväli on

$$]-e,e[.$$

5. Tarkastellaan potenssisarjaa $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-11)^k$, missä kertoimet $a_k$ määritellään seuraavasti: $a_0=1$ ja $a_{k+1}=(\frac{1}{7}+\frac{1}{k+1})a_k$ kaikilla $k=0,1,2,\ldots$. Määritä sarjan suppenemissäde ja suppenemisväli. (Vihje: lause 1.8 sivulla 94.)

*Ratkaisu.* Koska

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}=\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{(\frac{1}{7}+\frac{1}{k+1})a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{7}+\frac{1}{k+1}}=7,$$

niin sarjan $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-11)^k$ suppenemissäde on $7$. Sarjan kehityskeskus on $x_0=11$, joten sarjan suppenemisväli on $]11-7,11+7[=]4,18[$.

6. Tutkitaan monisteen sivua 88: Muodosta äärellinen summa (ei täydy sieventää), jonka arvo on rationaaliluku $q$, jolle pätee $|e-q|<10^{-20}$. (Laskinta saa käyttää apuna kertomalausekkeiden tarkastelussa.)

*Ratkaisu.* Sivun 88 mukaan $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=e$. Voidaan siis valita $q=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$, missä $n$ on jokin siis tarpeeksi suuri luonnollinen luku. Kun merkitään $R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}$, niin $e-q=R_n$ ja luentomonisteen mukaan $0<R_n<\frac{1}{n!n}$. Nyt siis riittää löytää sellainen $n\in\mathbb{N}$, että $\frac{1}{n!n}\leq 10^{-20}$, mikä on yhtäpitävää ehdon $n!n\geq 10^{20}$ kanssa.

Nyt voisimme tehdä helpon valinnan asettamalla $n = 10^{20}$, jolloin $q = \sum_{k=0}^{10^{20}} \frac{1}{k!}$. Luvun $n$ arvo saadaan pienemmäksi mm. huomaamalla, että kaikilla $n \geq 11$ pätee

$$n! = 10! \cdot 11 \cdot 12 \cdots n > \underbrace{11 \cdot 12 \cdots n}_{n-10\,kpl} > 10^{n-10}.$$

(Saman voi osoittaa induktiolla.) Valitsemalla siis $n = 30$ saadaan $n!n > 10^{30-10} \cdot 30 > 10^{20}$, jolloin myös $0 < R_n < 10^{-20}$ ja $q = \sum_{k=0}^{30} \frac{1}{k!}$.
Jos käytössä on laskuteknisiä apuvälineitä, niin $n$:lle voidaan valita vieläkin pienempi arvo. Nimittäin

$$21!21 = 1072909785605898240000 > 10^{20},$$

joten valitsemalla $n = 21$ saadaan $q = \sum_{k=0}^{21} \frac{1}{k!} = \frac{69439789852104840011}{25545471085854720000}$. Lisäksi voidaan todeta, että arvion $0 < R_n < \frac{1}{n!n}$ avulla ei voidan valita pienempää arvoa $n$:lle, koska

$$20!20 = 48658040163532800000 < 10^{20}.$$