MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II
Kertaus 2. välikoetta varten / Ratkaisuehdotuksia (RT)
27. - 29.4.2009

Tehtävät ovat aiheen mukaisessa järjestyksessä.

1. Suppeneeko vai hajaantuuko

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{5k^3+2}?$$

Ratkaisu. Tehtävän voi ratkaista esimerkiksi majoranttiperiaatteella tai vertailutestillä. Ihan ensimmäisenä kannattaa huomata, että tehtävän sarjan termit ovat "tyyppiä $1/k^2$" (nimittäjä 2 astetta suurempi, kuin osoittaja), joten voi tehdä "valistuneen arvauksen" siitä, että sarja suppenee.

I tapa:
Nyt

$$\underbrace{\frac{k}{5k^3+2}}_{\equiv x_k} < \frac{k}{5k^3} = \frac{1}{5k^2} < \underbrace{\frac{1}{k^2}}_{\equiv y_k}$$

kaikilla $k = 1, 2, \ldots$. Lisäksi $0 \leq x_k \leq y_k$. Näin ollen voimme vedota majoranttiperiaatteeseen (s. 64, Lause III.2.2.), jonka nojalla $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{5k^3+2}$ suppenee, sillä sille löydettiin suppeneva majorantti $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. (Luentomonisteen sivulla 68 on todistettu, että yliharmoninen sarja suppenee.)

II tapa:
Merkitään $x_k = \frac{k}{5k^3+2}$ ja $y_k = \frac{1}{k^2}$. Nyt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{y_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k \cdot k^2}{5k^3+2} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{5+2/k^3} = \frac{1}{5} \in]0, \infty[.$$

Lisäksi $0 \leq x_k \leq y_k$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots$, joten vertailutestin (s. 65, Lause III.2.4.) ehdot täyttyvät ja sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ suppenemisesta seuraa kysytyn sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{5k^3+2}$ suppeneminen.

2. Tarkastellaan funktioita $f_n :]0, 1[\to \mathbb{R}$, jotka on määritelty ehdolla

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \ln x,$$

missä $n = 1, 2, 3, \ldots$ Suppeneeko jono (f_n) pisteittäin? Suppeneeko se tasaisesti?

Ratkaisu. Osoitetaan, että $f_n(x) = \frac{1}{n} \ln x$ suppenee pisteittäin kohti vakiofunktiota $f(x) = 0$ kaikilla $x \in]0,1[$. Nyt

$$|f_n(x) - f(x)| = |\frac{1}{n} \ln x - 0| = \frac{1}{n} |\ln x| < \epsilon$$

kaikilla $x \in]0,1[$ aina kun $n > n_{\epsilon,x}$, missä $n_{\epsilon,x} \geq \frac{|\ln x|}{\epsilon}$. Siten $f_n(x) \longrightarrow 0$ pisteittäin.

Suppeneminen ei kuitenkaan ole tasaista. Tämä nähdään esimerkiksi vastaoletuksen avulla: Oletetaan, että funktiojonon suppeneminen kohti vakiofunktiota $f(x) = 0$ on tasaista. Tällöin kaikilla $\epsilon > 0$ ja kaikilla $x \in]0,1[$ pätee $|f_n(x) - 0| = \frac{1}{n}|\ln x| < \epsilon$, kun $n > n_\epsilon$, missä n_ϵ on jokin tarpeeksi suuri luonnollinen luku. Valitaan $\epsilon = 1$. Tällöin $\frac{1}{n}|\ln x| < 1$, mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että $n > |\ln x|$, kun $n > n_\epsilon$. Kuitenkin kaikille $n \in \mathbb{N}$ löytyy aina sellainen $x \in]0,1[$, että $|\ln x| \geq n$, joten saimme aikaan ristiriidan, eikä suppeneminen voi olla tasaista.

Toinen tapa todistaa ei-tasainen suppeneminen on vedota lauseeseen IV.1.3. (s. 78). Nyt

$$\sup\{|\frac{1}{n} \ln x - 0| : x \in]0,1[\} = \sup\{\frac{1}{n}|\ln x| : x \in]0,1[\} = \infty$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$, joten suppeneminen ei voi olla tasaista.

3. Määritä sarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)!} (x-3)^k$$

suppenemissäde ja suppenemisväli.

Ratkaisu.
I tapa:
Käytetään suppenemissäteen löytämiseksi raja-arvotestiä (Lause luentomoniste s.). Koska $(k+1)! > k! > 0$, niin kertoman määritelmän mukaan

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| &= \frac{1/(k!)!}{((1/k+1)!)!} = \frac{(k+1)! \cdot ((k+1)! - 1) \cdot ((k+1)! - 2) \cdots k! \cdots 1}{k! \cdot (k! - 1) \cdots 1} \\ &= (k+1)! \cdot ((k+1)! - 1) \cdot ((k+1)! - 2) \cdots (k! + 1) \longrightarrow^{k \to \infty} \infty. \end{aligned}$$

Näin ollen suppenemissäteeksi saadaan $R = \infty$ ja suppenemisväli on siten $]-\infty, \infty[$.

II tapa:
Huomataan, että $0 < \frac{1}{(k!)!} < \frac{1}{k!}$ kaikilla $k = 0, 1, 2, \ldots$. Merkitään $b_k = \frac{1}{k!}$.
Nyt

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} |\frac{b_k}{b_{k+1}}| = \lim_{k \longrightarrow \infty} |\frac{(k+1)!}{k!}| = \lim_{k \longrightarrow \infty} (k+1) = \infty,$$

joten luentomonisteen lauseen V.1.8 b)-kohdan nojalla sarjan $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x-3)^k$ suppenemissäde on ∞ ja suppenemisväli koko reaaliakseli.

Tarkastellaan sarjan $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)!}(x-3)^k$ itseistä suppenemista majoranttiperiaatteen avulla. (Muista, että majoranttiperiaate vaatii positiivitermiset sarjat!) Kiinnitetään (mielivaltainen) $x \in \mathbb{R}$. Nyt kaikilla $k = 0, 1, \ldots :$

$$0 \leq \left| \frac{1}{(k!)!}(x-3)^k \right| < \frac{1}{k!}|x-3|^k.$$

Tiedetään, että potenssisarja suppenee itseisesti ja tasaisesti (Weierstrassin testi s.84 + Lause V.2.1 s.95) jokaisella suppenemisvälinsä suljetulla osavälillä; tässä tapauksessa siis sarja $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}|x-3|^k$ suppenee kaikilla väleillä $[x-\rho, x+\rho]$, missä $0 < \rho < \infty$ (sillä $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(x-3)^k$ suppenee $\forall x \in \mathbb{R}$). Koska $x \in \mathbb{R}$ oli mielivaltainen, niin sarja $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}|x-3|^k$ suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Näin ollen $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)!}(x-3)^k$ suppenee itseisesti ja siten myös "tavallisessa mielessä" kaikilla $x \in \mathbb{R}$ (Lause III.1.13 s.62), joten suppenemissäde on ∞ ja suppenemisväli $]-\infty, \infty[$.

4. Selvitä

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(\cos x - 1) - 1}{(\cos x - 1)^2}$$

käyttämällä funktion $\cos t$ sopivaa Taylorin polynomia, jossa $t_0 = 0$.

Ratkaisu. Funktion $f(t) = \cos t$ Taylorin polynomi $T_n(t; 0)$, kun $t_0 = 0$, näyttää seuraavanlaiselta:

$$T_n(t;0) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(n)}(0)}{k!}(t-0)^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(n)}(0)}{k!} \cdot t^k.$$

Nyt voimme kirjoittaa funktion $f(t)$ Taylorin kehitelmän, sillä selvästi $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$:

$$f(t) = \cos t = T_n(t;0) + (t-0)^n \epsilon(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(n)}(0)}{k!} \cdot t^k + t^n \epsilon(t),$$

missä $\epsilon(t) \longrightarrow 0$, kun $t \longrightarrow t_0 = 0$.

Tässä tapauksessa "sopiva" Taylorin polynomi on $T_2(t; 0)$ (katso kysytyn osamäärän nimittäjän potenssia!), joten voimme kirjoittaa

$$\begin{aligned}\cos t &= 1 + \frac{f'(0)}{1!} \cdot t^1 + \frac{f''(0)}{2!} \cdot t^2 + t^2\epsilon(t) = 1 + \frac{\overbrace{-\sin 0}^{=0}}{1} \cdot t + \frac{\overbrace{-\cos 0}^{=-\frac{1}{2}}}{2} \cdot t^2 + t^2\epsilon(t) \\ &= 1 - \frac{1}{2}t^2 + t^2\epsilon(t),\end{aligned}$$

missä edelleen $\epsilon(t) \longrightarrow 0$, kun $t \longrightarrow 0$.

Jotta tästä muodosta olisi apua tehtävän ratkaisussa, tehdään yo. kehitelmään sijoitus $t = \cos x - 1$, jolloin

$$\cos(\cos x - 1) = 1 - \frac{1}{2}(\cos x - 1)^2 + (\cos x - 1)^2 \epsilon(\cos x - 1).$$

Huomataan, että kun $x \longrightarrow 0$, niin $(\cos x - 1) \longrightarrow 0$, mistä taas seuraa, että $\epsilon(\cos x - 1) \longrightarrow 0$ (tiedetään, että $\epsilon(t) \longrightarrow 0$ aina kun $t \longrightarrow 0$). Näin ollen

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\cos x - 1) - 1}{(\cos x - 1)^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{2}(\cos x - 1)^2 + (\cos x - 1)^2 \epsilon(\cos x - 1) - 1}{(\cos x - 1)^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \Big(-\frac{1}{2} + \epsilon(\cos x - 1) \Big) = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$