INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys II, 2009
Övning inför det andra kursförhöret

(1) Konvergerar eller divergerar

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k-2}?$$

(2) Konvergerar eller divergerar

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2 \ln k}}?$$

Jämför t.ex. med en oegentlig integral.

(3) Konvergerar eller divergerar

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7+\sin(k!)}{\sqrt{k}}?$$

(4) Konvergerar eller divergerar

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^k)}{k^2}?$$

Kom ihåg betydelsen av absolut konvergens.

(5) Konvergerar eller divergerar

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+2k}{3+k^4}?$$

(6) Konvergerar eller divergerar

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^5+6k+1}{k^6+5k+1}?$$

(7) Konvergerar eller divergerar

$$\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\ln(\sqrt{k})}?$$

(8) Existerar det en sådan serie att följden av dess delsummor är $1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{4^4}, \ldots$?

(9) Bestäm de $x$ för vilka

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{kx^2}$$

konvergerar. Tips: Den geometriska serien.

(10) Konvergerar eller divergerar serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k!}}?$$

(11) Konvergerar eller divergerar serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[7]{k!}}?$$

(12) Vi antar att den positiva serien $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergerar. Visa att serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x_k}}{k}$$

konvergerar.

(13) Vi antar att $f_n : \Delta \to \mathbb{R}$ och $f : \Delta \to \mathbb{R}$ och att $f_n \to f$ likformigt när $n \to \infty$. Varför har vi att $f_n \to f$ punktvis när $n \to \infty$.

(14) Vi betraktar funktionerna $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, som definieras med villkoren $f_n(x) = \frac{1}{n}x^n$. Konvergerar följden $(f_n)$ punktvis? Konvergerar den likformigt?

(15) Vi betraktar funktionerna $f_n : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ som definieras med $f_n(x) = \frac{1}{n}\sqrt{x}$. Konvergerar följden $(f_n)$ punktvis? Konvergerar den likformigt?

(16) Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}\sin^4 x + 7}\, dx.$$

Använd likformig konvergens (kontrollera att vi har likformig konvergerns!)

(17) Konvergerar serien $\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}$ likformigt i intervallet $]-1,0[$?
Tips: geometriska serien.

(18) Vilken summaformel kan du få genom att undersöka tredje derivatan av den geometriska serien $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$? Tips: Jämför med kompendiets exempel.

(19) Existerar det en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ för vilken $f(0) = 2008$, $f'(0) = 2007$, $f''(0) = 2006$ och $f^{(n)}(0) = 0$ för alla $n \geq 3$?

(20) Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} \int_{0}^{1} (1 - \frac{1}{n})^{nx}\, dx.$$

Använd likformig konvergens (kontrollera att vi har likformig konvergerns!) Kom också ihåg definitionen av talet $e$.

(21) Vi antar att $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är likformigt kontinuerlig och vi i definierar funktionerna $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med villkoren $f_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$. visa att följden $(f_n)$ konvergerar likformigt.

(22) Vi antar att $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är likformigt kontinuerliga för alla $n = 1, 2, \ldots$ och att $f_n \to f$ likformigt i hela $\mathbb{R}$. Visa att $f$ är likformigt kontinuerlig.

(23) För vilka tal $a > 0$ har vi att serien $\sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k$
(a) konvergerar i intervallet $]-a, a[$;
(b) konvergerar likformigt i intervallet $[-a, a]$?

(24) För vilka tal $a > 0$ har vi att serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{3^k}$$

(a) konvergerar i intervallet $]-a, a[$;
(b) konvergerar likformigt i intervallet $[-a, a]$?

(25) Vi antar att $a < 0$. Konvergerar serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{kx}$$

likformigt i intervallet $]-\infty, a]$?

(26) För vilka $x$ konvergerar serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (x-3)^k}{k}?$$

Tips: undersök exempel 1.3 på sida 95

(27) För vilka $x$ konvergerar serien $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k$? Tips: Sats 1.8 på sida 98; undersök konvergensintervallets ändpunkter separat.

(28) Bestäm konvergensradien och konvergensintervallet för serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k}\right)^{k^2} x^k.$$

Tips: Sats 1.8 på sida 98.

(29) Vi betraktar potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-11)^k$ vars koefficienter $a_k$ definieras enligt följande: $a_0 = 1$ och

$$a_{k+1} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k a_k$$

för alla $k = 0, 1, 2, \ldots$. Bestäm seriens konvergensradie och konvergensintervall. (Tips: Sats 1.8 på sida 98.)

(30) Serien i föregående uppgift har en summafunktion $f(x)$ i intervallet $]11 - R, 11 + R[$. Beräkna värdena $f(11)$, $f'(11)$, $f''(11)$ och $f'''(11)$. (Tips: Sats 2.5 på sida 101.)

(31) Beskriv funktionen

$$f(x) = \frac{1}{1 - x^7}$$

som en potensserie som konvergerar i intervallet $]-1, 1[$ och bestäm med hjälp av detta funktionens 10:nde derivata i punkten $x = 0$.

(32) Bilda i stil med exemplet på sida 109 ett närmevärde för talet $e^2$ så att felet är mindre än $10^{-20}$. Närmevärdet har formen av en ändlig summa. Denna behöver inte förkortas. Är det erhållna talet ett rationellt tal? (Du får känna till att $2 < e < 3$.)

(33) Beräkna i stil med exemplet på sida 115 ett sådant närmevärde för integralen

$$\int_0^1 e^{x^4}\, dx,$$

att felet är mindre än 0,01.

(34) Anta att $x \in [-1, 1]$. Bedöm med hjälp av Taylorpolynom differensen $\sinh x - (2x - \sin x)$. (Man kan visa att den är mindre än $0,0006$. Om du har en grafisk räknare till ditt förfogande eller om du kan använda Maple lönar det sig att rita en bild.)

(35) Bilda Taylorpolynomet $\mathrm{T}_2(x; 8)$ för funktionen $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Hitta på en gränsvärdesuppgift som du kan lösa med hjälp av detta

(36) Utred med hjälp av Taylorpolynom

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\sin x - x\cos x}{e^x - 1}.$$

(37) Utred

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - 1}{\sin^2 x}$$

genom att använda ett lämpligt Taylorpolynom för $\cos t$ där $x_0 = 0$.